Université de Montréal

La Logique et les logiques : la question du pluralisme

par

Sébastien Poirier

Département de philosophie
Faculté des arts et sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures en vue de l'obtention
du grade de Maître ès Arts (M.A.) en Philosophie, option recherche

Août 2011

Identification du jury

Université de Montréal
Faculté des études supérieures et postdoctorales

Ce mémoire intitulé :

La Logique et les logiques : la question du pluralisme

présenté par

Sébastien Poirier

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Yvon Gauthier

(président-rapporteur)

Jean-Pierre Marquis

(directeur de recherche)

Daniel Laurier

(membre du jury)

Résumé

Partant des travaux séminaux de Boole, Frege et Russell, le mémoire cherche à clarifier l'enjeu du pluralisme logique à l'ère de la prolifération des logiques non-classiques et des développements en informatique théorique et en théorie des preuves. Deux chapitres plus « historiques » sont à l'ordre du jour : (1) le premier chapitre articule l'absolutisme de Frege et Russell en prenant soin de montrer comment il exclut la possibilité d'envisager des structures et des logiques alternatives; (2) le quatrième chapitre expose le chemin qui mena Carnap à l'adoption de la méthode syntaxique et du principe de tolérance, pour ensuite dégager l'instrumentalisme carnapien en philosophie de la Logique et des mathématiques. Passant par l'analyse d'une interprétation intuitive de la logique linéaire, le deuxième chapitre se tourne ensuite vers l'établissement d'une forme logico-mathématique de pluralisme logique à l'aide de la théorie des relations d'ordre et la théorie des catégories. Le troisième chapitre délimite le terrain de jeu des positions entourant le débat entre monisme et pluralisme puis offre un argument contre la thèse qui veut que le conflit entre logiques rivales soit apparent, le tout grâce à l'utilisation du point de vue des logiques sous-structurelles. Enfin, le cinquième chapitre démontre que chacune des trois grandes approches au concept de conséquence logique (modèle-théorétique, preuve-théorétique et dialogique) forme un cadre suffisamment général pour établir un pluralisme. Bref, le mémoire est une défense du pluralisme logique.

Mots clés: pluralisme logique, conséquence logique, révisionnisme, monisme, absolutisme, principe de tolérance, logique sous-structurelle, théorie des preuves, logique contemporaine.

Abstract

Starting from the seminal work of Boole, Frege and Russell, the dissertation seeks to clarify the issue of logical pluralism in the era of the proliferation of non-classical logics and the developments in theoretical computer science and proof theory. Two "historical" chapters are scheduled: the first chapter articulate the absolutism of Frege and Russell, taking care to show how it condemns the possibility to consider alternative structures and logics; the fourth chapter describes the path that led Carnap from the adoption of the syntactic method to the formulation of the principle of tolerance, then goes on to display Carnap's instrumentalism in philosophy of Logic and mathematics. Opening with the analysis of an intuitive interpretation of linear logic, the second chapter then turns to the establishment of a form of logico-mathematical pluralism with the help of order theory and category theory. The third chapter delineates the playground of revisionism (philosophical positions surrounding the debate between monism and pluralism) and then provides an argument against the thesis that denies the reality of the conflict between rival logics, all this being done by adopting the substructural logic point of view. The fifth chapter shows that each of the three main approaches to the concept of logical consequence (model-theoretic, proof-theoretic and dialogical) supplies a framework sufficiently general to establish pluralism. In short, the dissertation is a defence of logical pluralism.

Key words: logical pluralism, logical consequence, revisionism, monism, absolutism, principle of tolerance, substructural logic, proof theory, contemporary logic.

Table des matières

Remerciements

- à (-H.; M. von F.), (M.T.;S.B.), (B.F.;V.), SB.; KB;
- à mes parents, mon frère;
- à mon directeur de recherche, Jean-Pierre Marquis, et ses légendaires suggestions éclairantes;
- au Département de Philosophie de l'Université de Montréal.

Les très bons systèmes de logique, dit d'Alembert, servent seulement d'usage à ceux qui peuvent s'en passer. À travers un télescope, l'aveugle ne voit rien.

Lichtenberg

Introduction

La naissance de la Logique[1] (déductive) moderne doit beaucoup à Frege et son *Begriffsschrift* (1879) : il nous offre la *première formalisation* à part entière de ce qui allait devenir un peu plus tard la *logique classique* du premier ordre, i.e. le calcul propositionnel augmenté de la théorie de la quantification. Ces premiers *systèmes formels* furent formulés par Frege en termes de *théories axiomatiques*, où l'on postule la vérité d'un certains nombres de lois – ce sont les axiomes – tout en offrant une description explicite des (deux ou trois) règles d'inférence qui guideront les preuves au sein du système, une procédure qui fut reprise telle quelle par Russell et Whitehead dans leur *Principia Mathematica* (1910).

Sous les auspices du *Begriffsschrift* et des *Principia*, la Logique patauge dans l'*absolutisme*: (1) les lois logiques sont *certaines* (parce qu'évidentes) ce qui fait qu'elles n'admettent pas de révision (elles seraient inaltérables, une opinion partagée par Kant) et (2) dans la mesure où Frege et Russell cherchent à offrir un système universel, la portée des quantificateurs ($\forall, \exists$) s'étend à *tous* les objets, à tout ce à propos de quoi il nous est possible de parler, nous offrant non pas *un* univers mais *l'Univers* dans sa totalité.[2] Et le réalisme… : Frege et Russell cherchaient à reconstruire la structure logique du monde, systèmes formels en main. Cette *structure fixe et universelle* étudiée par l'absolutiste nous impose la logique classique, la seule vraie logique, excluant la possibilité conceptuelle d'envisager des *structures* et des *logiques* alternatives. À ce stade, le concept de pluralisme logique n'était tout simplement pas envisageable.

[1] La lettre majuscule dans « Logique » permet de faire référence à la discipline en tant que telle. L'utilisation de « logique » réfèrera à un système particulier. Nous nous intéressons à la Logique déductive.
[2] Voir van Heijenoort (1976; 1979a).

La doctrine absolutiste sera rapidement récusée par une série de développements à la fois philosophiques et « techniques ». Les lois du *Begriffsschrift* et des *Principia* seront principalement révisées sous motifs philosophiques, nous offrant des logiques non-classiques. En fait, la simple existence de logiques alternatives à la logique classique réfute la croyance de Frege et Russell en l'existence d'une forme d'intuition qui puisse nous faire reconnaître l'évidente certitude des lois classiques. Rétrospectivement, cette croyance a d'ailleurs quelque chose de passablement obstiné. Déjà à l'époque de Frege, une trentaine d'années avant la publication du *Begriffsschrift*, la découverte des géométries non-euclidiennes entamait une révolution conceptuelle qui récusa un bon nombre de doctrines, kantiennes notamment, telle l'invocation d'une certaine forme d'intuition (universelle) qui puisse nous assurer de la certitude des lois et principes de certaines disciplines fondamentales; de la géométrie euclidienne pour ce qui nous intéresse… Puis la théorie de la relativité et la mécanique quantique emboitèrent le pas aux travaux de Bolyai, Lobachevsky et Riemann pour ce qui est de la transmutation en cours. Comme le remarque van Heijenoort (1979a :76), l'absolutisme de Frege se *manifeste* (explicitement) dans sa polémique contre le projet hilbertien d'un fondement axiomatique de la géométrie euclidienne – et dans son mépris des intuitions non-euclidiennes de Riemann devrait-on ajouter. Pourquoi chercher à fonder des axiomes et des théorèmes qui sont absolument et objectivement vrais, i.e. certains? On notera que Frege affiche cette même attitude vis-à-vis des axiomes et des théorèmes du *Begriffsschrift*.

Deuxièmement, l'étude *réaliste* frégéo-russellienne de la Logique passant par la considération d'une seule structure fixe et universelle sera progressivement délaissée pour l'approche métalogique de Hilbert, Gödel et cie. qui permet de distinguer une pluralité de structures alternatives en faisant usage de deux notions étrangères au groupe Frege-Peano-Russell : une interprétation et un métalangage (un discours sur les systèmes).

On peut dire qu'en présupposant que la logique du *Begriffsschrift* soit *la* description de la structure logique de la réalité, Frege et Russell ont été mené à ignorer la distinction entre l'interprétation (l'application) d'un symbolisme et le symbolisme en tant que tel, entre une théorie logique et une logique. De manière générale, une distinction de cette sorte est essentielle à la conceptualisation d'une multitude de systèmes *alternatifs*. C'est d'ailleurs un point qui ressort de l'analyse de la *révision* de la géométrie euclidienne au 19ème siècle - une géométrie que l'on supposait être *la* description de la structure spatiale de la réalité : pour rendre compte des systèmes alternatifs à celui d'Euclide, il nous faut tirer la distinction entre une géométrie pure et une géométrie appliquée. L'émergence de logiques non-classiques peut donc être mise en rapport avec la création des géométries non-euclidiennes sous l'angle suivant : la *révision* de la logique classique par, disons, la logique intuitionniste nous force à tirer la distinction entre une logique « *pure* » et une *théorie logique* qui sert à l'*application* de la première. La Logique n'est plus la logique de cette réalité (frégéenne) préexistante; une logique apparaît désormais comme un cadre *que l'on appose* sur un phénomène quelconque. Le réalisme en Logique n'a plus sa place; nous introduisons des systèmes formels suivant nos besoins et les réorganisations conceptuelles que nous offre l'Histoire.

De nos jours, l'existence d'une pluralité de logiques est un fait de l'Histoire des sciences, et la Logique s'étudie par le biais d'une multitude d'approches différentes, soit, pour mentionner celles que nous aborderont: modèle-théorétique, preuve-théorétique, dialogique, algébrique et catégorique. Certaines logiques cherchent à modéliser *nos* pratiques inférentielles en langue naturelle, d'autres non. Certaines approches cherchent à caractériser plus directement la notion « informelle » de conséquence logique, d'autres non. De notre point de vue, tout cela mérite *d'être rangé sous* la catégorie « Logique ».

La recherche en Logique peut viser à améliorer notre compréhension de l'argumentation en langue naturelle tout comme elle peut chercher à établir des résultats purement formels. Il est grand temps que la *tradition philosophique* qui veut qu'un système formel soit une logique dans l'unique mesure où il aspire à codifier nos pratiques inférentielles s'ajuste au changement de « paradigme » en théorie des preuves et aux développements récents en informatique théorique, les isomorphismes entre systèmes formels et systèmes fonctionnels (λ-calcul, Système *F* etc.) en tête de liste.

Une logique est une structure mathématique bien définie qui possède, dans le meilleur des cas, plusieurs applications différentes. L'application d'une logique à un phénomène linguistique quelconque, à notre argumentation en langue naturelle par exemple, demande l'élaboration d'une théorie logique (manuel de traduction, sémantique, métathéorie). Une logique apparaît alors comme un *modèle*, i.e. comme une *idéalisation* du phénomène en question nous offrant certains avantages pour son étude. Deux *logiques rivales* modélisent différemment un même phénomène, et, contrairement au moniste, nous croyons qu'il est pratiquement impossible qu'il y ait un seul modèle correct de nos pratiques inférentielles. C'est beaucoup trop demander et au concept de modèle et à une seule relation de conséquence logique. Toutes les approches mentionnées ci-haut permettent une forme ou une autre de *pluralisme logique*; en tant que position philosophique, le pluralisme logique s'impose avec force, nous permettant de rendre compte de cette pluralité de systèmes formels et de la rivalité qui surgit entre eux lorsqu'il est question de les appliquer. Dans ce qui suit, nous articulerons rapidement l'interaction des différentes traditions et les résultantes de celles-ci, qui forment désormais un ensemble disparate d'approches à la Logique

De Boole et Frege aux logiques sous-structurelles

Depuis Grattan-Guinness (1988), c'est un lieu commun que de relever *deux traditions distinctes* qui furent largement responsables de la forme que prît la Logique moderne dans les années 1920, au moment où elles seront explicitement *accordées* l'une à l'autre dans les questions *d'ordre métalogique et métamathématique*, un mouvement dont Hilbert fut partiellement responsable.[3] Nous parlons ici de la tradition d'une *logique mathématique* et de celle d'une *algèbre de la logique*.

La genèse de cette première tradition (*syntaxique* pourrait-on également dire) remonte au *Begriffsschrift* de Frege, rattachée qu'elle est au développent de la notion d'un *système formel*, i.e. un système dans lequel il nous est possible de formuler et de manipuler, à l'aide de règles et de définitions explicites, les relations *syntaxiques* des formules en faisant fi de la signification de celles-ci. C'est ce traitement syntaxique, formel, rigoureux, mathématique…de la Logique qui motive l'idée de la tradition d'une

[3] Cette position est essentiellement celle de van Heijenoort (1976 : 46). Contrairement à Grattan-Guinness, van Heijenoort parle d'une tradition syntaxique plutôt que d'une logique mathématique et d'une tradition sémantique plutôt que d'une algèbre de la logique.

logique *mathématique* - et celle d'une tradition *syntaxique* - partant de Frege[4]. Le lecteur qui jettera un coup d'œil aux manuels de logique contemporaine les retrouvera plus souvent qu'autrement sous l'appellation « systèmes à la Hilbert ». Toutefois, l'utilisation que font Frege et Russell de ces systèmes déductifs est conditionnée par leur projet universaliste, qui demande que les quantificateurs portent sur *un seul domaine* contenant *tous les objets*. Ainsi, lorsque vient le temps d'articuler la sémantique du langage défini par leurs systèmes formels, Frege et Russell contemplent une seule structure, fixe et universelle, posant la notion de *vérité* au premier plan, à l'*intérieur* même du système, en identifiant la prouvabilité formelle à la vérité logico-mathématique à travers l'utilisation du tourniquet syntaxique ($\vdash$) pour exprimer l'assertion de la vérité d'une proposition ($\vdash A$). Le traitement contemporain des systèmes à la Hilbert est aux antipodes de cela.

Durant la période qui précède les années 1920, les notions d'*interprétation*, de *validité* et de *satisfaction* sont essentiellement, quant à elles, l'apanage de la tradition d'une *algèbre de la logique*, et elles sont permises par la considération de *différents domaines*, *différentes structures* sur lesquelles il nous est possible de faire porter les quantificateurs. Cette tradition algébrique est une *tradition sémantique*, ne serait-ce que pour la raison suivante : on s'intéresse uniquement aux *dénotations* (le Vrai ou le Faux, 0 ou 1) des formules de notre langage, lesquelles sont interprétées dans des structures algébriques/ensemblistes. La genèse de celle-ci remonte au *Mathematical Analysis of Logic* de Boole (1847) et, inspirés de ce dernier, aux travaux du groupe Schröder-Peirce-Löwenheim. Dans la plupart de ces travaux, il n'y a pas de notion de prouvabilité formelle clairement définie; le tout s'effectue sans axiomes ni règles d'inférence, en témoigne l'absence d'axiomes pour les quantificateurs (Π, Σ) de Peirce et le théorème de Löwenheim (1915), un des premiers résultats « modèle-théorétique » pour le calcul des prédicats, qui s'appuie uniquement sur des considérations sémantiques reliées à la validité d'une formule dans des domaines fini et infini dénombrable.

Indépendamment de ces deux traditions, Hilbert, débutant avec ses *Grundlagen der Geometrie* (1889), représente déjà, par défaut, une position intermédiaire entre

[4] C'est d'ailleurs la motivation derrière l'utilisation du terme « mathematical logic » par van Heijenoort dans le titre de son recueil introductif. On y dérive des formules à partir d'autres formules un peu comme l'on calculerait la somme de deux entiers. Voir van Heijenoort (1966 : p. vii).

celles-ci : (1) l'étude rigoureuse d'une théorie mathématique passe par sa formalisation au sein d'un *système axiomatique* et (2) pour chaque branche des mathématiques (géométrie, arithmétique etc.) à l'étude, on *choisit un domaine* contenant les objets de notre intérêt et sur lequel porteront les quantificateurs. Contrairement à Frege, Hilbert conçoit plusieurs structures arbitraires dans lesquelles nous *interpréteront* les formules, cette procédure lui permettant de poser des questions qui seront au cœur de son programme en fondements des mathématiques, soit celles de la *consistance*, de la *complétude* et de la *décidabilité* d'un système formel. Des questions d'ordre *métamathématique*, qui ne sont pas accessibles à Frege et Russell. Plus encore, Hilbert rejette l'absolutisme de Frege vis-à-vis des axiomes : l'étude d'un système formel doit se faire indépendamment des significations que l'on pourrait vouloir attribuer aux concepts fondamentaux (points, lignes etc.) qui composent les axiomes, ceux-ci n'étant aucunement des lois évidentes et certaines. Bref, on doit s'extraire de l'intuition, un réquisit *formaliste*.

La conception hilbertienne des théories axiomatiques, s'éloignant radicalement de l'absolutisme de Frege et Russell, domine essentiellement la scène aux débuts des années 1920. Très rapidement, il sera question de jeter les bases du projet finitiste hilbertien en s'attaquant aux problèmes (consistance, complétude etc.) que posent les différentes formulations axiomatiques de la Logique en tant que telle – pour Hilbert, il est uniquement question de logique classique. En 1926, un assistant de Hilbert, Paul Bernays, prouve la complétude du calcul propositionnel. En 1928, dans leurs *Grundzüge der theoretischen Logik*, Hilbert et Ackermann formule le problème de la complétude du calcul des prédicats, lequel fut résolu par Gödel une année plus tard, et le résultat publié en 1930. Ce type de question accorde d'emblée les approches preuve-théorétique et modèle-théorétique : on demande justement si toute formule valide d'un point de vue sera valide de l'autre.

Si la complétude de la logique du premier ordre était attendue, l'incomplétude de l'arithmétique formelle fut une surprise pour la communauté des logiciens et des mathématiciens. Cela s'explique par une croyance largement (pour ne pas dire systématiquement) répandue à l'époque, qui voulait que toutes les propriétés vraies soient démontrables. Le premier théorème d'incomplétude de Gödel (1931) est catégorique : il existe des propositions indécidables. En d'autres mots, la prouvabilité formelle n'épuise pas le concept de vérité logico-mathématique. Le programme hilbertien d'une démonstration de cohérence pour les axiomes de l'arithmétique est miné, pour ne pas dire réfuté. Déroulons rapidement ce qui nous intéresse dans la suite…

Sous le coup de l'ω-incomplétude, Tarski, qui fut formé dans la *tradition algébrique*, critique l'approche preuve-théorétique Hilbertienne et cherche à fonder le concept de conséquence logique dans son *approche sémantique* (1936), qui redonnera aux considérations sémantiques ses lettres de noblesse. L'élaboration de la sémantique *modèle-théorétique* lance la *théorie des modèles*, i.e. l'*étude ensembliste* des relations qu'entretiennent entre elles les formules d'un langage formel, une discipline qui n'a pas grand-chose à voir avec le projet initial, d'ordre sémantique[5]. L'algèbre de la logique initiée par Boole, Peirce et Schröder, elle, aboutira en la *théorie des relations d'ordre* (« order theory ») puis, portée par Birkhoff , en une *algèbre universelle*. Cette approche algébrique à la Birkhoff (1940), très fertile pour l'étude des logiques, fut dépassée (englobée) quelques années plus tard par l'introduction de la *théorie des catégories* (Eilenberg et Mac Lane, 1945), en lien avec la topologie algébrique; la théorie des topos de Grothendieck notamment. Depuis Lawvere (1964) et Lambek (1968; 1969), l'utilisation du vocabulaire catégorique pour l'étude des systèmes déductifs a démontré son ingéniosité, la *logique catégorique* en premier plan.

Pour continuer notre vertigineuse montée, il nous faut passer du côté d'un élève de Bernays, également assistant de Hilbert : Gerhard Gentzen. Ce dernier reprend en main l'obsession hilbertienne des démonstrations de cohérence à travers ses propres travaux en théorie des preuves, soit à partir du calcul des séquents et du *Hauptsatz* (1935), ce qui lui permet, en 1936, de prouver la consistance de l'arithmétique de Peano par récurrence *transfinie* jusqu'à l'ordinal ε_0… une méthode obscurément finitiste. Peu

[5] Pour différentes raisons, l'approche modèle-théorétique ne rend pas compte de la notion informelle de conséquence logique. Voir Kreisel (1967) et Boolos (1985) par exemple. En postulant qu'une logique est potentiellement un modèle, nous délaissons volontairement des questions de cette sorte. En fait, nous croyons qu'aucune logique n'est en mesure de rendre (entièrement) compte de cette improbable notion informelle de conséquence logique. Plus encore, il existe certaines inférences qui sont *matériellement valides* sans être *formellement valides*. Voir Brandom (2000).

importe la question de savoir si la démonstration de Gentzen est ou non convaincante pour un *métamathématicien à la Hilbert*, ce qui nous intéresse ici ce n'est pas la fin mais le moyen utilisé par Gentzen pour l'atteindre, soit le *calcul des séquents* et les systèmes de déduction naturelle, qui sont des bijoux de *constructivité*.

Il fallut attendre la fin des années 1960 pour que la théorie des preuves à la Gentzen supplante la théorie des preuves à la Hilbert. Ce *changement* de « paradigme » peut être conçu comme un *passage* du « pourquoi » au « comment », suivant l'expression de Girard (1997) : (1) on délaisse les questions de fondements comme la consistance des axiomes pour se concentrer sur la constructivité des systèmes de Gentzen; (2) on remplace les méthodes axiomatiques d'Hilbert par ces groupes de *règles symétriques* qui permettent l'élimination des coupures dans les calculs des séquents et les résultats de normalisation en déduction naturelle, établies par Prawitz en 1965. Par la suite, une attention particulière sera portée au système intuitionniste, qui est *déterministe* grâce à sa propriété de Church-Rosser. Mieux encore, inspiré de Curry, Howard propose en 1969 *l'isomorphisme de Curry-Howard*, qui établit une correspondance stricte entre un λ-calcul simplement typé et un système de déduction naturelle intuitionniste, assurant la constructivité à ce dernier. Dans la foulée de cet isomorphisme, Girard introduit le système F (1970), qui est à la fois une déduction naturelle et un λ-calcul du second-ordre, sa preuve de normalisation à la Prawitz lui permettant de prouver la consistance de l'arithmétique de Peano (avec des méthodes ensemblistes…). Ces résultats ont généré un vaste champ de recherche en informatique théorique : la théorie intuitionniste des types de Martin-Löf, le langage « Automath » de Bruijn, les sémantiques dénotationnelles etc. À l'opposé du « pourquoi », le « comment » ne s'intéresse pas tant à l'obtention d'un algorithme de décision qu'aux *propriétés algorithmiques en tant que telles*.

Enfin, ce retour en force des systèmes de Gentzen a permis de revitaliser l'étude des logiques non-classiques à travers le point de vue des *logiques sous-structurelles*, qui émergea il y a de cela une quinzaine d'années (Schröder-Heister et Dosen, 1993). Les concepts de séquent et d'hypothèse structurelle nous permettent de renégocier la conceptualisation de la rivalité entre logique classique et logiques non-classiques. Dans cette perspective, on mentionnera la fertilité de la logique linéaire de Girard (1987) en tant qu'elle participe d'une théorie générale des logiques.

Maintenant, pourquoi avoir (grossièrement) raconté *cette* histoire? Disons d'abord qu'elle nous montre l'existence d'une *pluralité* d'approches pour l'étude des logiques. Ensuite, parce que les récents développements en théorie des preuves, en théorie des catégories et en informatique théorique sont largement ignorés au sein de la littérature actuelle en philosophie de la Logique et des mathématiques. La plupart des manuels de Logique contemporaine (adressés aux « philosophes » du moins) restent figés dans le cadre méthodologique des théorèmes de fiabilité et de complétude. Pourtant, ces développements ne sont pas étrangers aux deux traditions qui fondèrent l'étude de la Logique moderne.

Contenu des chapitres

Le premier chapitre expose *l'absolutisme de Frege et Russell*. Partant du projet logiciste frégéen pour en faire ressortir les deux héritages qui sont à la base de son *Idéographie*, nous articulons ensuite la doctrine absolutiste en fonction de ceux-ci. L'objectif général consiste à montrer comment l'absolutisme *exclut* la possibilité conceptuelle d'envisager des structures et des logiques alternatives, et ce qui le récuse (réfute) dans les développements subséquents en Logique.

Le deuxième chapitre commence par élargir l'ensemble de ce qu'une certaine tradition philosophique range sous « Logique »; une interprétation intuitive de la *logique linéaire* est à l'ordre du jour. On cherchera ensuite à répondre à la question *« qu'est-ce qu'une logique ?»* en fournissant le plus petit *dénominateur commun* entre logiques, un objectif qui est atteint par l'utilisation de la théorie des relations d'ordre et la théorie des catégories, nous permettant alors d'établir une *forme logico-mathématique* de pluralisme.

Le troisième chapitre s'attaque à délimiter le terrain du débat philosophique entre *monisme et pluralisme* passant pour ce faire par une clarification de l'enjeu de la révision d'une logique par une autre. Il sera ensuite question de la reformulation de *l'enjeu du révisionnisme* à l'intérieur du calcul des séquents. Nous montrerons que le point de vue des *logiques sous-structurelles* offre un argument contre la thèse qui veut que le conflit entre logiques rivales ne soit qu'apparent.

Le quatrième chapitre est consacré à *Carnap* et son *principe de tolérance*. L'intention est de nier que Carnap puisse être considéré comme défendant un pluralisme logique. Il sera d'abord question d'articuler le chemin qui mena Carnap d'une forme d'universalisme à une attitude pluraliste pour ensuite dégager de la doctrine carnapienne un *instrumentalisme* en philosophie de la Logique et des mathématiques.

Le dernier chapitre expose le *contenu théorique* d'un pluralisme logique suivant les *trois grandes approches* au *concept de conséquence logique* : modèle-théorétique, preuve-théorétique et dialogique. Il sera démontré que chacune de ces trois approches constitue un cadre suffisamment général pour rendre compte de l'existence d'une pluralité de logiques.

Chapitre 1

L'absolutisme de Frege et Russell

L'absolutisme consiste à soutenir qu'il n'y a qu'une seule logique correcte, la logique classique, (1) dont les lois sont inaltérables au sens où elles seraient objectivement et absolument vraies en vertu de leur évidence et (2) qui est universelle au sens où les quantificateurs portent sur un domaine fixe et universel contenant tout ce à propos de quoi il nous est possible de parler. La Logique est ici l'étude de la seule vraie logique, la logique classique, la possibilité d'autres logiques étant en elle-même plus ou moins condamnée par l'absolutisme. C'est d'ailleurs cette dernière constatation qui motive l'étude de l'absolutisme dans le contexte actuel marqué par l'existence d'une pluralité de logiques et par un (re)gain d'intérêt envers la question (philosophique) du pluralisme logique. La naissance de la logique moderne - elle devint « classique » pour la première fois, on s'en doute, suivant les critiques de gens comme Brouwer – fut dominé par l'absolutisme à travers le *Begriffsschrift* (1879) et les *Grundgesetze der Arithmetik* (1893) de Frege puis les *Principia Mathematica* (1910) de Russell (et Whitehead)[6]. Aucun de ces deux piliers de la logique mathématique naissante ne s'est explicitement

[6] Sous l'étiquette « logique classique », nous rangeons ici les systèmes formels suivants : le calcul propositionnel et la logique du premier ordre avec ou sans égalité ou, de manière un peu plus restrictive, seulement le deuxième (la logique du premier ordre inclut le calcul propositionnel). Cela est amplement suffisant pour les besoins de la discussion dans la mesure où les différences entre logiques rivales apparaissent essentiellement au niveau propositionnel. C'est cette dernière remarque qui justifie l'exclusion de la logique du second ordre et/ou d'une théorie des types bien que cela ne fasse pas justice aux programmes logicistes de Frege et Russell aux vues desquels la logique du premier ordre apparaît insuffisante.

réclamé de cette doctrine mais elle repose néanmoins de manière implicite dans ces ouvrages.

La définition proposée ci-haut combine celles de van Heijenoort (1979) et Haack (1996). Elle permet de cerner avec un certain degré de précision une position qui est essentiellement, si l'on se concentre sur l'histoire de la logique moderne, celle de Frege et Russell[7]. Outre l'intérêt historique et théorique que comporte l'articulation de celle-ci, elle permet de faire une distinction quelque fois ignorée entre l'absolutisme et le monisme[8]. Si l'Histoire n'a pas encore décidé du sort du monisme - une position qui consiste à soutenir, *stricto sensu*, qu'il n'y a qu'une *seule vraie logiqu*e, pour reprendre l'expression de Read (2006) - elle aura néanmoins récusée l'absolutisme tel que présenté ici. Dans ce qui suit, nous nous concentrerons plus spécialement sur le cas de Frege.

1.1 Le logicisme de Frege

La philosophie des mathématiques kantienne pose les vérités arithmétiques comme étant synthétiques *a priori*. Leur connaissance se fonde donc sur l'intervention de l'intuition (pure). Le logicisme de Frege cherche à leur fournir un autre fondement, sans faire appel ni à l'intuition ni à l'expérience, en montrant que la preuve de tout théorème arithmétique peut procéder « grâce aux déductions seules, appuyé uniquement sur les lois de la pensée, qui sont au-dessus de toute particularités» (Frege 1999 :6), i.e. suivant les seules lois de la Logique. Dans la mesure où les vérités de la Logique sont analytiques, cette réduction confirmera, croit-il, que la connaissance des vérités arithmétiques est indépendante de l'expérience et de l'intuition; que les mathématiques sont également analytiques. Derrière l'idée d'une dérivation des lois arithmétiques à partir des lois et des vérités logiques, il y a une motivation épistémologique : que la *certitude* de la logique soit transmise aux mathématiques.

De l'intérieur, la réussite du projet logiciste de Frege dépend essentiellement de l'absence de « trous » dans la chaîne des déductions qui mène à la preuve d'un théorème arithmétique (« gapless mathematical proof ») car des lacunes au sein des preuves

---

[7] On verra dans la quatrième section que Wittgenstein soutient une version de (2). Kant soutenait quant à lui une version de (1).
[8] Voir Engel (1989 : 361) par exemple.

permettraient à l'intuition de se glisser subrepticement dans le processus. À cet effet, la thèse formulée par Frege est que l'imprécision de la langue naturelle, dont l'équivocité du contenu de ses énoncés apparait au premier plan, est un obstacle à la réussite de son projet, d'où la création d'un langage artificiel, son *Idéographie*, qui lui permettra d'exprimer les propositions de l'arithmétique en rendant explicite le contenu conceptuel des inférences matérielles qui gouvernent les preuves informelles de l'arithmétique. Le contenu des énoncés étant complètement déterminé au sein du formalisme, chaque étape de la déduction peut être rigoureusement contrôlée : la simple *forme* des énoncés nous dira si B suit de A ($A \vdash B$), nous permettant ainsi d'identifier sans équivoque quelle suite d'énoncés compte comme une preuve d'un théorème x. Ce travail de formalisation, d'explicitation du langage des mathématiques, est tributaire d'un héritage à la fois mathématique et philosophique: (1) c'est une « radicalisation de l'idée d'axiomatisation héritée d'Euclide » [9] et (2) une réalisation partielle du projet leibnizien d'une *caractéristique universelle*. S'y trouvent articulé, dans ces deux héritages, les éléments qui expriment l'absolutisme de Frege (et Russell).

1.2 Axiomatique, vérité et certitude

Là où l'axiomatique d'Euclide se contente de nous fournir les « postulats » et les « notions ordinaires » (axiomes) qui doivent guider toute preuve géométrique et arithmétique en langue naturelle, laissant indéterminé leur contenu et la manière exacte dont ils doivent être utilisés, Frege (et Russell) nous offre une axiomatique en langue artificielle de sorte que les principes généraux guidant les preuves mathématiques puissent ne relever que de la logique pure. C'est en cela que la démarche frégéenne est une radicalisation de l'idée euclidienne : c'est le passage d'une axiomatique matérielle à une axiomatique formelle. Dans l'introduction aux *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege souligne clairement cette radicalisation, qu'il conçoit comme sa propre contribution à l' « idéal d'une méthode strictement scientifique » :

> "This ideal which I have here attempted to realize, and which might indeed be named after Euclid, I should like to describe as follows. It cannot be demanded that everything be proved, because that is impossible; but we can require that all propositions used without proof be expressly declared as such,

[9] Bonnay, D. & M. Cozic (2009), p.66.

> so that we can see distinctly what the whole structure rests upon... Furthermore, I demand – and in this I go beyond Euclid – that all methods of inference employed be specified in advance; otherwise we cannot be certain of satisfying the first requirement." (Frege, 1967: 2)

Cette contribution frégéenne, on la voyait déjà à l'œuvre dans son *Begriffsschrift*, qui nous offrait pour la première fois une axiomatisation complète de ce qui allait devenir le calcul propositionnel et la logique du premier ordre. Comme le remarque Dummett, la formalisation à part entière de ces premiers systèmes logiques a donc été effectuée suivant une analogie avec une théorie axiomatique:

> « Les fondateurs de la logique mathématique moderne, Frege et, à sa suite, Russell, avaient formalisé les systèmes logiques en ayant en tête une analogie trompeuse avec une théorie axiomatique, c'est-à-dire en réduisant au minimum les règles d'inférence et en stipulant axiomatiquement la validité des formules d'une certaine forme. Dans une telle formalisation, l'attention se porte sur le fait de postuler des vérités logiques et sur la dérivation à partir de celles-ci d'autres vérités logiques. Cela était le résultat d'une attitude délibérée de la part de Frege et en ce sens (et en ce sens seulement) son approche de la nouvelle logique était rétrograde. Il caractérisa la logique en disant que, tandis que les sciences ont la vérité pour but, en logique la vérité n'est pas qu'un simple but mais l'objet d'étude. Cependant, la réponse traditionnelle à la question à savoir quel est l'objet de la logique est qu'il s'agit non pas de la vérité mais de l'inférence, ou, de façon plus précise, de la relation de conséquence logique. Ceci fut l'opinion partagée durant toute la période où la logique était dans le marasme, avant qu'elle ne soit revitalisée par Frege, et il s'agit certainement du bon point de vue. » (Dummett, 1982 :484-485)[10]

Bien que nous croyons que l'on peut effectivement qualifier de « rétrograde » la formalisation des systèmes logiques en termes de théories axiomatiques[11], il est plus intéressant, ici, de remarquer avec Dummett qu'une telle formalisation concentre effectivement l'attention du logicien sur les vérités logiques en tant que telles et les relations combinatoires entre elles, mais que cette attention était délibérée de la part de Frege. En adoptant l'analogie entre les systèmes logiques et les *théories* axiomatiques,

[10] Cité à partir d'une traduction libre de Marion (2001).

[11] L'analogie est « trompeuse », suivant certains *desiderata*… Suivant Marion (2001), nous croyons qu'en insistant sur le fait qu'une preuve est avant tout un acte que l'on accomplit et que l'inférence est au cœur de cette procédure, les systèmes logicistes comme ceux de Frege et Russell ignorent un trait essentiel puisqu'il ne font qu'enregistrer le *résultat des actes* que sont les preuves. Quiconque a déjà effectué une preuve dans une axiomatisation de CP (par exemple) peut en témoigner. Cela donne une raison d'adopter une formulation des différentes logiques en termes de systèmes de déduction naturelle, qui mettent en évidence les différents actes menant à une preuve, pour formaliser différents domaines de discours. Voir également Kneale (1956) et Etchemendy (1988) pour des remarques semblables à celles de Dummett.

Frege suit en fait de très près sa caractérisation de la Logique, celle-ci étant posée comme la *science* la plus générale qui a pour objet d'étude la vérité en tant que telle et dont les lois sont universelles et certaines[12]. La Logique porte sur le monde, elle nous parle du monde en ce qu'elle nous fournit des lois qui ne s'appliquent à aucun objet en particulier mais à tous les objets. Même chose chez Russell, pour qui les lois de la logique sont simplement des lois d'un ordre plus général que celles de la physique ou la zoologie par exemple: « [L]ogic is concerned with the real world just as truly as zoology, though with its more abstract and general features » (Russell 1919 :169).

Autant chez Frege que chez Russell, le choix d'un système logique axiomatisé n'est pas anodin : (1) étant donné leur logicisme, toutes les dérivations qui ont lieu au sein de la théorie axiomatique procèdent suivant un certain nombre de lois logiques (moyennant l'ajout de [méta] règles d'inférences) dont la postulation en tant qu'axiomes ne pose aucun problème puisqu'elles sont certaines dans la mesure où elles sont *évidentes* (« self-evident »); (2) étant donné leur projet d'une reconstruction logique du monde, la construction de leurs systèmes universels à partir d'un petit nombre de lois logiques certaines a le mérite d'être économique pour ne pas dire élégante. Mais pourquoi celles-ci précisément?

Si le *Begriffsschrift* doit plus directement sa création à l'entreprise logiciste de Frege, il ne faut pas oublier que ce dernier y voit une formulation *explicite* des principes et des lois que l'on utilise de manière *implicite* dans toute enquête d'ordre rationnelle. Le *Begriffsschrift* nous fournit les normes de la *pensée* en tant que telle. Les systèmes formels qu'on y trouve, désormais rangés sous la bannière « classique », nous offriraient donc les conditions les plus générales de la pensée, hors desquelles on peut douter qu'il y ait véritablement quelque chose comme de la pensée (cohérente et rationnelle du moins…); hors de cette structure logique, les propositions seraient en quelque sorte dénuées de sens.

Dans la mesure où toute enquête rationnelle doit utiliser et donc présupposer la Logique, il n'y a aucune perspective à partir de laquelle on puisse théoriser *sur* celle-ci :

[12]Quine est sans aucun doute un des plus fameux héritiers de cette conception frégéenne, aussi erronée soit-elle : « […] I would say that logic is the systematic study of logical truths » (Quine, 1986: p.vii).

c'est le « logocentric predicament », selon l'expression de Ricketts (1985). Ainsi, d'un point de vue frégéen, nous n'avons pas besoin de tenter de justifier et d'expliquer pourquoi c'est précisément la vérité de *cet* ensemble de lois/axiomes logiques que l'on postule et non pas celle d'un autre. Les lois (et principes) de la Logique n'admettent pas de justification extra-logique et encore moins de fondements d'ordre philosophique. Frege compte ici sur le fait qu'en tant que locuteur compétent, nous serons aisément capables de reconnaître la vérité des lois logiques sous prétexte qu'il est évident qu'elles le sont. C'est donc la supposée évidence des lois logiques qui leur confère leur certitude, i.e. le fait qu'elles soient objectivement et absolument vraies. C'est là que tient toute l'importance épistémologique d'une dérivation des axiomes de l'arithmétique à partir des vérités logiques; toute l'importance *épistémologique* du logicisme…

Ce premier trait de l'absolutisme de Frege, l'évocation d'un critère épistémologique, l'évidence (la « self-evidence »), pour justifier la certitude (une notion…épistémologique!) des vérités logiques, celles de la logique « classique », rencontre au moins deux problèmes[13] : (1) certains principes dits « évidents » finissent pas être reconnu comme étant faux; (2) les gens ne s'entendent pas sur ce qui fait qu'un principe est évident ou non (Haack 1996 :29). Le programme de Frege a directement rencontré le premier problème: l'axiome de compréhension présent dans le système des *Grundgesetze der Arithmetik* (1893) donne naissance à l'*antinomie* de Russell démontrant ainsi l'inconsistance de celui-ci. Il semble que Frege ait lui-même douté de l'évidence de l'axiome en question :

> "I have never disguised from myself it's [i.e. l'axiome de compréhension] lack of the self-evidence that belongs to the other axioms and that must properly be demanded from a logical law." (Frege, 1974: 234)

Suite à l'échec du programme frégéen, Russell, de son côté, s'aperçût que sa propre tentative pour sauvegarder l'entreprise logiciste nécessitait l'utilisation de nouveaux axiomes – l'axiome du choix, de réductibilité et de l'infini - qui n'arboraient pas le même statut *intuitif* que d'autres, jugés « purement » logique. Malgré le fait qu'il adopta

[13] Wittgenstein le déplorait dans le *Tractatus* : « Mais il est remarquable qu'un penseur aussi rigoureux que Frege ait fait appel à l'évidence comme critère de la proposition logique » (6.1271).

une conception « hypothétique » de la Logique pour réduire cette tension, soit en proposant de considérer certains axiomes comme des *hypothèses* à mettre sous la forme d'un conditionnel au sein des théories, Russell ne délaissa pas complètement le vieil idéal logiciste de certitude logique puisqu'il continua tout de même à affirmer que certaines propositions sont *évidentes* de manière intrinsèque. Or l'évidence d'une proposition peut difficilement être considérée comme la marque de sa certitude, du fait qu'elle soit objectivement vraie, comme en témoigne l'inconsistance des axiomes du système frégéen. En effet, ce critère échoue à nous fournir une garantie épistémologique quelconque car peu importe que l'on dise de l'axiome de compréhension (1) qu'il *apparaissait* évident mais ne l'était pas réellement ou (2) qu'il *était* évident mais malencontreusement faux, les deux suppositions mènent à une impasse : suivant (1) nous ne possédons aucun critère précis pour déterminer si une proposition est réellement évidente et suivant (2) il se peut qu'une proposition soit évidente mais fausse (Haack 1978 : 236).

En affirmant que les lois de la logique classique ne sont pas révisables, qu'elles sont inaltérables, l'absolutiste veut dire que nous ne pourrions pas nous tromper quant à l'absolue vérité de celles-ci. Derrière cela, on trouve l'assurance qu'il y a quelque chose comme une intuition (universelle) qui puisse nous faire reconnaître la certitude des lois de la logique classique, et qu'une remise en question de celles-ci ne pourrait que nous plonger dans la confusion la plus totale étant donné la place qu'elles occupent dans notre appareillage conceptuel. Or cette position est réfutée par la simple existence de logiques non-classiques: la remise en cause de certaines lois « classiques » réfute la supposition d'une intuition ou d'une capacité de reconnaissance de cette sorte[14].

Une fois ébranlée la garantie épistémologique des vérités de la logique classique, le logiciste doit se rabattre sur quelque chose d'autre; un autre critère qui puisse justement nous montrer ce qu'il y a de spécial à propos des concepts et des modes d'inférences logiques; ce qui pourrait nous justifier à entreprendre le projet d'une réduction des vérités arithmétiques aux vérités logiques. On observe un certain déplacement vers des critères d'ordre ontologique plutôt qu'épistémologique. Comme

[14] Voir van Heijenoort (1979a :78-79) pour une position semblable.

l'ont remarqué Hacking (1979) et Mac Farlane (2000), l'intérêt contemporain de la thèse du logicisme dépend largement de la possession d'un critère précis de démarcation (« a principled dichotomy ») entre constantes logiques et non-logiques nous fournissant les propriétés nécessaires et/ou suffisantes de la « logicalité », ce qui nous permettrait de séparer glorieusement la Logique des autres sciences en montrant la spécificité de ses vérités[15]. Dans le contexte actuel marqué par la prolifération des logiques non-classiques, le problème de la démarcation des constantes logiques forme en quelque sorte le premier défi du logiciste qui se refuserait, non sans raisons, à se faire absolutiste.

1.3 Universalité, Idéographie et caractéristique universelle.

Le deuxième trait de l'absolutisme à la Frege-Russell est l'universalisme, i.e. la position qui consiste à soutenir qu'il n'y a qu'une seule structure, un seul domaine, un univers fixe et universel comprenant tout ce à propos de quoi il est possible de parler, et que celui-ci nous impose la logique classique[16]. Que cette structure fixe et universelle puisse nous imposer la logique classique, cela est assuré par le fait que cette structure est elle-même déployée par un système formel dont les axiomes « classiques » sont tenus pour objectivement vrais. Comme l'a montré van Heijenoort (1967), l'universalité du système frégéen est mise en évidence par une opposition d'inspiration leibnizienne que Frege a lui-même déployée dans ses réponses aux critiques que Schröder a adressé au *Begriffsschrift*, soit l'opposition entre un *calculus ratiocinator* et une *lingua characterica*.

L'*Idéographie* de Frege est un *langage* formulaire qui a pour tâche *l'expression* d'un *contenu conceptuel* :

> "My intention was not to represent an abstract logic in formulas, but to express a content through written signs in a more precise and clear way that it is possible to do through words. In fact, what I wanted to create was not a mere *calculus ratiocinator* but a *lingua characterica* in Leibniz's sense" (Frege, 1882: 1-2)

[15] Et rien ne nous ne permet de déterminer précisément si, une fois le critère en main, celui-ci n'inclurait pas, en plus des opérateurs « classiques », les opérateurs modaux dans la catégorie des constantes logiques, laissant un absolutiste comme Frege dans une fâcheuse position.

[16] Pour une discussion plus détaillée de cette position, voir van Heijenoort (1976; 1979a).

Ce langage formulaire « modelé sur celui de l'arithmétique » nous offre plus qu'une simple « logique abstraite », qu'un simple *calculus ratiocinator* au sens leibnizien du terme, car bien qu'il nous offre effectivement des règles mécaniques nous permettant de manipuler les symboles de sorte que l'on puisse déduire une vérité d'une autre, l'innovation symbolique qui l'accompagne, déterminant sans ambigüité le contenu conceptuel des propositions de la langue naturelle, fait en sorte que soit « figuré » à la pensée les connexions logiques qu'elles entretiennent entre elles. C'est en cela que l'*Idéographie* est une *lingua characterica* ou, plus précisément, une *réalisation partielle de l'idéal leibnizien d'une caractéristique universelle*[17]. C'est avec cet argument en poche que Frege critique la *tradition algébrique* partant de Boole. La logique booléenne, tout comme le calcul propositionnel, est un simple *calculus*, une logique abstraite, dans la mesure où les propositions y restent non analysées, réduite à prendre une des deux valeurs de $V = \{1,0\}$, toute l'attention étant dirigée vers les relations algébriques qu'elles entretiennent entre elles. C'est donc la théorie la quantification qui est une *lingua characterica*[18] car c'est précisément l'introduction des quantificateurs, des prédicats, des variables et l'analyse de la proposition en termes de fonctions et d'arguments qui permettent l'expression d'un contenu. Reprenons la formule de van Heijenoort : l'universalité de la *lingua* frégéenne est en premier lieu celle du vocabulaire de la théorie de la quantification car celui-ci permet en principe d'exprimer la totalité de la connaissance scientifique.

L'universalité de cette *lingua* se retrouve plus spécialement dans l'interprétation « absolutiste » des quantificateurs. C'est une interprétation objectuelle dans la mesure où l'on fait appel aux objets qui tombent dans le parcours des variables :

"$(\forall x)Fx$" est interprété comme "Pour tout objet *x,* dans le domaine *D,* tel que Fx".

[17] C'est notre tentative pour replacer l'opposition de Frege dans la réalité leibnizienne, le fait étant qu'on ne trouve pas l'idée d'une *lingua characterica* chez Leibniz mais seulement celle d'une *characteristica universalis*. Voir Peckhaus (2010) pour une critique détaillée de l'exégèse effectuée par van Heijenoort sur les deux traditions de la logique moderne, l'algèbre de la logique et la logique mathématique, et leurs liens avec l'opposition entre *calculus ratiocinator* et *lingua characterica*.

[18] Si l'on suit la remarque faite dans la note précédente, la théorie de la quantification est donc une réalisation partielle de la caractéristique universelle, au même titre que l'arithmétique par exemple.

"$(\exists x)Fx$" est interprété comme "Pour au moins un objet *x,* dans le domaine *D,* tel que Fx".

Autant chez Frege que chez Russell, la portée des quantificateurs s'étend à *tous* les objets, à tout ce à propos de quoi il nous est possible de parler. On nous offre non pas *un* univers mais *l'Univers*; un domaine *D* contenant tous les objets, et ce même à l'intérieur de la théorie des types de Russell car la portée des quantificateurs reste la même pour chacune des différentes strates formées par les types. Rien de plus étranger aux auteurs des *Grundgesetze der Arithmetik* et des *Principia Mathematica* que l'idée de faire varier les domaines d'interprétations à la Tarski par exemple : un *modèle* pour un ensemble *P* de formules du premier ordre y est une paire ordonnée $\langle \mathcal{D}, I \rangle$, où $\mathcal{D}$ est l'univers du modèle, un *domaine de discours* que nous aurons *choisi* au préalable et sur lequel nous ferons porter les quantificateurs.

En plus de condamner la possibilité de faire varier les domaines d'interprétations et de considérer différents systèmes logiques, l'universalisme de Frege et Russell entraîne au moins deux conséquences notables pour la Logique: (1) les fonctions doivent être définies pour tous les objets; (2) il n'y a pas de place pour des questions d'ordre métalogique (van Heijenoort 1967 : 326). Le premier point affirme la lourdeur de l'ontologie invoquée : dans la mesure où le domaine de discours n'est pas un univers arbitraire mais l'unique structure fixe et universelle contenant tous les objets, la valeur d'une fonction doit exister pour tous les ensembles d'arguments choisis à partir des objets de l'univers. Ainsi, les valeurs des fonctions "$(3) + (rouge)$" et "$(3)\ a\ tué\ (Karl)$" doivent exister bien qu'elles ne nous intéressent pas pour des raisons qui sont évidentes. L'univers fixe ainsi défini contient non seulement des objets physiques mais également des objets abstraits, non-physiques, tels les nombres. Nous obtenons donc une forme de platonisme car l'absolutiste suppose que la réalité possède une structure logique et que le système formel qu'il étudie *décrit* les relations (logiques) qu'entretiennent entre eux les objets (logiques) qui peuplent l'Univers. Mais nous devrions plutôt dire que l'absolutiste *veut* un domaine *D* contenant tout ce à propos de quoi il est possible de discourir car sa conception présuppose que les constituants ontologiques de l'univers soient précisément ceux qui peuvent tomber dans le parcours des variables liées aux quantificateurs. Or il n'y a aucun critère d'existence universellement accepté qui puisse nous dire exactement ce que nous devons compter comme des objets[19]. Il en faudrait de beaucoup pour que l'ontologie soit en mesure de nous fournir les constituants d'un univers fixe qui serait de surcroit celui souhaité par l'absolutiste.

L'impossibilité pour Frege et Russell d'envisager plusieurs structures arbitraires, étant donné l'universalisme de leur système, a également comme conséquence le fait qu'il n'y a pas de place pour des questions d'ordre métalogique et métasystématique comme la consistance et la complétude des systèmes formels, l'indépendance des axiomes etc. et pour des notions telles la validité et la « satisfiabilité » des formules[20]. L'absence de questions « externes » fait que nous obtenons une « sémantique interne ». Plus précisément, les notions *sémantiques*, au sens où nous les employons désormais, leurs sont inconnues. Chez Frege et Russell, l'expression d'une assertion (jugement) est rendu par " $\vdash$ " et est lue comme" $\ldots est\ vraie$". C'est le sens de « sémantique interne » : le *tourniquet syntaxique* ($\vdash$) exprime une propriété essentiellement *sémantique*. Tout cela apparaît très clairement lorsque l'on remarque que les vérités logiques sont ici des vérités *analytiques*, et qu'une vérité est analytique *si et seulement si* elle est *prouvable* à partir des axiomes et des définitions explicites.

L'identification de la vérité logico-mathématique à la prouvabilité formelle ne permet effectivement pas d'envisager une question comme celle de la complétude des systèmes formels. De manière générale, nous l'avons déjà remarqué, l'absolutisme condamne la possibilité de s'extraire de cette structure fixe et universelle pour en considérer d'autres, d'où l'absence d'un intérêt quelconque pour une question de cette sorte; l'universalisme de leurs systèmes les empêchaient tout simplement de concevoir la possibilité d'une distinction entre plusieurs langages/logiques, d'où l'impossibilité conceptuelle pour eux de formuler l'idée d'un *métalangage*. Il faut se détourner du groupe Frege-Russell-Peano pour constater que ce type de question était déjà, à l'époque, exploré par d'autres. Mentionnons ici le programme métamathématique de Hilbert et la

[19] Voir van Heijenoort (1979a:80).

[20] On voit tout de suite qu'il existe une différence entre l'utilisation tarskienne de « métalangage », ancrée dans un dispositif ensembliste, et une utilisation plus large, qui signifie *un discours sur les systèmes en tant que tels,* partant d'un autre niveau.

question de la consistance en fondements de mathématiques, le théorème de Löwenheim (1915), considéré par plusieurs comme contenant en germe la théorie des modèles, puis, dans cette lignée, les travaux de Tarski, Gödel, Church et cie. Une question cruciale soulevée par l'utilisation des axiomatiques à la Frege-Russell est justement celle de la complétude sémantique, et on voit mal comment il est possible de se la poser sans croire en l'impossibilité d'identifier vérité logico-mathématique et prouvabilité formelle…une croyance qui est manifeste et succinctement présentée par Gödel dans l'ouverture de son article contenant le théorème de complétude pour la logique du premier ordre :

> ”Of course, when such a procedure is followed the question at once arises whether the initially postulated system of axioms and principles of inference is complete, that is, whether it actually suffices for the derivation of *every* logico-mathematical proposition, or whether, perhaps, it is conceivable that there are true propositions (which may even be provable by means of other principles) that cannot be derived in the system under consideration.” (Gödel, 1967:583)

Mais il fallut attendre son (premier) théorème d'incomplétude pour que la distinction soit fondée de manière *démonstrative* (1931). En effet, le théorème démontre que dans les systèmes formels suffisamment puissants pour contenir l'arithmétique, la classe des propositions arithmétiques vraies contient au moins un élément que la classe des propositions arithmétiques prouvables ne contient pas. Il y a donc une distinction fondamentale à faire entre la vérité logico-mathématique d'une formule et la prouvabilité de celle-ci.

Le résultat d'incomplétude nous amène également à douter de l'idée selon laquelle la notion ordinaire de validité serait épuisée par la validité formelle, soit la validité en vertu de la forme logique des énoncés dans un système comme celui des *Grundgesetze der Arithmetik* ou des *Principia Mathematica* et donc, dans leur cas, par la prouvabilité formelle. Car il faut bien se le rappeler, les langages artificiels de Frege et Russell (et Wittgenstein…) ont la prétention de nous faire découvrir la forme logique des énoncés de la langue naturelle à travers leurs formalisations, cette forme étant en quelque sorte « cachée » par l'imprécision de la langue naturelle, et donc de nous faire découvrir la structure logique de la réalité. Or, en exhibant des propositions indécidables au sein d'un formalisme comme celui des *Principia*, le phénomène d'incomplétude montre que certains énoncés reconnus comme étant valides à l'extérieur du système seront formalisés par des formules indécidables.

1.4 Le rêve déchu d'une logica magna

En 1979, vers la fin de « Absolutism and Relativism in Logic », van Heijenoort faisait la remarque suivante :

> "The failure of absolutism in logic is the failure of realism, that is, of a conception for which experience is transmuted into a reality independent of any process of knowledge. This is certainly not a conception that the historical development of science seems to favour. The organization of knowledge does not proceed by piecemeal addition, but by an unceasing reorganization, in which concepts are replaced by others. This climate of science is much more congenial to relativism in logic than to absolutism. Systems are changed according to needs... Human knowledge has not reached a stage of completion and stability that would allow us to fit into a *logica magna*." (van Heijenoort, 1979a: 83)

À la question de savoir s'il n'y a qu'une seule logique correcte, le relativiste répond par un « non » ferme et pertinent. Quant à l'absolutiste, il ne peut que très difficilement envisager la possibilité d'autres logiques : (1) étant donné qu'ils sont certains, objectivement et absolument vrais, les principes de la logique classique n'admettent pas de révisions (inaltérables…); (2) l'axiomatisation des lois certaines de la logique classique déploie une seule structure, fixe et universelle, contenant tout ce à propos de quoi il nous est possible de parler, nous empêchant ainsi de considérer différents domaines d'interprétations, différents langages, différentes logiques… Ce rêve d'une *logica magna*, d'un système logique universel nous offrant *la logique* qui embrasse tout, est tombé en ruine, et l'échec du réalisme (du platonisme frégéen…) est ici celui de la croyance en une structure logique de la réalité reflétée par *cette unique logique*, le langage artificiel parfait qu'étudie l'absolutiste. En plus des difficultés philosophiques que rencontre l'absolutisme, on peut dire que l'Histoire a tranché. Certes, l'absolutisme restera une position philosophique vivante aussi longtemps qu'il y aura quelqu'un pour la défendre[21], mais l'Histoire a le mérite de réfuter ou, du moins, de rendre peu intéressante et désuète certaines croyances. En l'occurrence, la croyance en

[21] Je conserve ici l'adage d'un de mes professeurs: « Une position philosophique meurt quand il n'y a plus personne pour la défendre ». Ainsi, nous évitons un platonisme à l'égard des positions philosophiques…

l’impossibilité de réviser les principes de la logique classique, sous prétexte que nous ne pourrions pas nous tromper quant à la certitude de ceux-ci, est réfutée par l’existence de logiques non-classiques telles la logique intuitionniste et la logique de la pertinence. Plus encore, le développement du point de vue métalogique à travers les travaux de Hilbert, Tarski, Gödel (et al.) a contribué à récuser la croyance en une structure fixe et universelle, une sémantique « interne » à un seul domaine, un point qui influença grandement Carnap dans les années 1930.

Chapitre 2

Qu’est-ce qu’une logique?

Depuis la consécration des deux systèmes formels que l’on retrouve dans le *Begriffsschrift* (le calcul propositionnel augmenté de la théorie de la quantification) au titre de « logique classique », la discipline a vu le développement d’une multitude de logiques : la logique intuitionniste, la logique de la pertinence, les logiques modales, la logique quantique, les logiques polyvalentes, la logique linéaire, la logique paraconsistante, la logique floue, les calculs de Lambek, etc. L’existence d’une pluralité de logiques est désormais un fait de l’Histoire des sciences. Malgré cela, on trouve encore des gens pour nous dire que certains de ces systèmes formels ne sont pas, à proprement parlé, des logiques. Après avoir relevé la confusion qui sous-tend ce type d’affirmation et introduit quelques définitions informelles (logique/théorie logique, Logique lisse/Logique rude), nous passons à une étude de cas dont l’objectif consiste à souligner la pertinence de certaines logiques « lisses » pour la modélisation du raisonnement en langue naturelle, e.g. la logique linéaire. Il restera enfin à répondre à la question « qu’est-ce qu’une logique? », ouvrant ainsi la voie à une forme mathématique de pluralisme logique et à d’autres, qui la présupposent.

2.1 Théorie logique vs logique

Dans *Logical Pluralism*, Beall et Restall (2006 : 8) affirment que les algèbres booléennes, le calcul de Lambek, le λ-calcul et la logique linéaire ne sont pas des *logiques* mais des *algèbres*. Cette affirmation est ambiguë : on sait, depuis Tarski (1935), que le calcul propositionnel, dont le statut de « logique » ne fait aucun doute, peut être réduit à une algèbre de Boole. De même pour la logique intuitionniste, dont le « squelette » est une algèbre de Heyting. Dans la mesure où certaines « logiques » peuvent être interprétées en termes de structures algébriques, on ne voit pas très bien le sens de la distinction faite par Beall et Restall. En fait, ils renchérissent en notant que ces systèmes sont des logiques dans l'unique mesure où ils entretiennent une *ressemblance* de famille avec le noyau de la *tradition* en Logique qui elle, a à faire avec l'évaluation des *arguments*[22]. L'exclusion de ce type de systèmes de la catégorie « logique » est monnaie courante, et la supposition qui la motive peut être relevée dans l'affirmation suivante :

> « The claim of a formal system to be a logic depends, I think, upon it's having an interpretation according to which it can be seen as aspiring to *embody canons of valid argument*..." (Haack, 1978: 3)[23]

Un système formel est composé d'un alphabet, de règles de formations syntaxiques déterminant les expressions bien formées et d'une relation de conséquence. Un système formel est une logique, nous dit-on, dans l'exacte mesure où il possède une *interprétation* nous permettant de modéliser l'argumentation en langue naturelle pour ensuite en faire ressortir les arguments valides.

La Logique, nous disent Beall et Restall, suivant en cela Haack et beaucoup d'autres, *doit* être un outil nous permettant d'analyser les relations inférentielles entre les prémisses et les conclusions d'arguments que nous utilisons dans la pratique (2006 : 8). Une logique digne de ce nom doit donc aspirer à *modéliser* nos pratiques inférentielles. C'est là *l'application canonique* d'une logique au sein de la tradition *philosophique* : l'évaluation des arguments informels par la spécification formelle de la notion de validité/conséquence[24]. Ayant dit cela, nous avons déjà relevé la confusion : le mot

[22] En évoquant la tradition qui voit en la Logique une discipline cherchant à évaluer les arguments en langue naturelle, on se rattache à une tradition philosophique partant d'Aristote. Il est remarquable que cette conception ait pris congé avec la tradition initiée par Frege : la logique mathématique…

[23] Je souligne.

[24] En fait, c'est l'application souhaitée... Dans la pratique, il est très rare de rencontrer des philosophes qui utilisent effectivement les logiques pour formaliser leurs arguments et ceux des autres. Cela est en partie

« logique » s'applique indifféremment aux logiques *pures*, aux systèmes formels, et à la théorie logique (la modélisation x, y, z d'une pratique inférentielle) que suppose l'application d'une logique (pure) particulière. Par « logiques pures », il faut simplement entendre une famille de structures mathématiques bien définies dont la logique classique et la logique linéaire (par exemple) font partie.

La confusion est éliminée lorsque l'on se fait à l'idée qu'un système formel *est* une logique peu importe la manière dont il est appliqué (i.e. interprété), et lorsque l'on remarque qu'il vaudrait mieux remplacer le mot « logique », tel qu'utilisé par une bonne majorité de philosophes, par « théorie logique ». Suivant ici Resnik (1996 : 491), nous dirons qu'une *théorie logique* est un quadruple composé d'un système formel, d'une sémantique, d'une métathéorie et d'un manuel de traduction pour la formalisation des arguments. Une théorie logique aspire donc à l'application canonique d'une logique (d'un système formel) quelconque, i.e. une modélisation de nos pratiques inférentielles. En tant que *logique*, le calcul propositionnel par exemple a différentes applications possibles (modéliser les circuits électriques etc.) et non pas une seule; son utilisation ne se restreint pas à celle mise de l'avant par les philosophes, soit l'évaluation de la validité des arguments.

La tendance à vouloir réserver le titre honorifique de « logique » aux systèmes formels qui aspirent à l'application canonique est une forme de chauvinisme qui mérite d'être dépassée. Cette idée reçue ne fait pas justice aux nombreux développements qu'a subit la Logique au cours des dernières décennies : les systèmes de Gentzen, les théorèmes de normalisation de Prawitz, les travaux de Lambek sur les systèmes déductifs et la théorie des catégories, la théorie des preuves et les logiques sous-structurelles, la logique linéaire etc. Un résultat fondamental fréquemment ignoré des philosophes est l'isomorphisme de Curry-Howard (1969), i.e. la découverte d'un isomorphisme entre les preuves dans un système de déduction naturelle intuitionniste et un λ-calcul simplement typé : toute preuve en logique intuitionniste correspond à un *algorithme* – c'est pour cette raison qu'elles sont *constructives* : admettons que nous y prouvons $\exists n \in \mathbb{N}. P(n)$, il nous

---

attribuable au fait que, tout comme pour la plupart des questions philosophiques, celles de la philosophie de la logique et des mathématiques n'ont pas reçues de réponses qui soient communément admises.

est possible d'*exhiber* un entier naturel n qui satisfait la propriété P[25]. Ici, une *preuve* d'une formule A se *comporte formellement* comme un *terme* du type A. Autre conséquence directe : une preuve dans ces systèmes intuitionnistes correspond à un programme informatique (les *termes* représentent des programmes), ce qui a eu pour effet de lancer un vaste projet de recherche dont les résultantes sont autant de logiques différentes que la théorie des types intuitionnistes de Martin-Löf, le système « Automath », le λ-calcul du second ordre de Reynolds etc. Dans cette vague, on mentionnera l'isomorphisme entre le système F de Girard, un λ-calcul du second ordre introduit indépendamment de Reynolds, et l'arithmétique de Peano; une correspondance qui permit de confirmer la *conjecture de Takeuti*, soit la consistance de l'arithmétique du second-ordre. Un point à retenir ici : bien qu'il y ait une certaine distinction entre les *systèmes fonctionnels* (λ-calcul, système F etc.) et les *systèmes formels* (calcul propositionnel, arithmétique de Peano etc.), les isomorphismes entre ces deux groupes justifient que la Logique s'intéresse également au premier groupe.

La recherche en Logique peut viser à augmenter notre compréhension de l'argumentation et du raisonnement en langue naturelle tout comme elle peut viser à obtenir des résultats « purement » formels ayant ou non de potentielles applications en informatique théorique par exemple. C'est le sens de la distinction faite par Goldstein (1992 : 96) entre la Logique rude (« rough logic») et la Logique lisse (« smooth logic ») : la première est composée de ces projets de recherche qui visent à augmenter notre compréhension de l'argumentation naturelle et la deuxième, de ceux qui visent des résultats « purement » formels.

Bref, la proposition est la suivante : adapter le sens que le terme « Logique » a pris au sein d'une certaine *tradition philosophique* aux développements récents, extérieurs à celle-ci, en admettant, entre autres choses, qu'une logique *puisse* ne pas aspirer à l'application canonique. Que les suites de symboles d'un système formel/fonctionnel soient plus facilement applicables (en vertu ou non d'une

[25] La logique classique n'est pas constructive car il n'y a aucune manière de considérer ses preuves comme des algorithmes, étant donné le caractère non-déterministe de l'élimination des coupures dans *LK*. Cela apparaît lorsqu'elle est formulée en termes de calcul des séquents, où la composition des preuves est donnée par l'élimination des coupures (« cut elimination »).

interprétation préméditée) à des structures telles que les types linguistiques (systèmes de Lambek) où les processus de calcul informatique (logique linéaire, λ-calcul) qu'aux énoncés d'une langue naturelle, cela ne devrait pas nous amener à conclure que là où on ne s'intéresse pas directement à ces derniers, il y a Logique en un sens dérivé seulement[26]. D'ailleurs, certaines logiques issues d'un programme en Logique lisse seront toujours susceptibles de recevoir dans l'avenir des interprétations satisfaisantes pour ce qui est de leurs applications aux langues naturelles. La Logique possède sa propre « géométrie » qui mérite d'être étudiée pour elle-même, et la prise en considération des systèmes fonctionnels n'est pas sans pertinence. Pour modérer la formule de Girard (2001), disons que la Logique est en partie la logique de ses propres règles.

2.2 Logique lisse vs Logique rude : une étude de cas

La distinction de Goldstein gagne toutefois à être considérée comme une sorte de continuum : une logique qui fut développée dans le cadre d'une recherche en Logique lisse peut très bien s'avérer avoir des implications pour notre compréhension et notre modélisation du raisonnement en langue naturelle, et une logique développée dans un cadre rude des implications purement formelles et des applications en informatique théorique. C'est le premier cas de figure qui nous intéresse plus spécialement et qui semble largement ignoré. D'un point de vue historique, il ne comporte pourtant rien de très étonnant lorsqu'on se rappelle que la logique du premier ordre (incluant le calcul propositionnel) telle qu'on la retrouve dans le *Begriffsschrift* était d'abord un formalisme mathématique destiné à expliciter le langage de l'arithmétique avant d'être récupéré par les philosophes pour devenir un outil servant à l'évaluation des arguments en langue naturelle.

Rien d'étonnant non plus d'un point de vue théorique : le rapport d'influence entre nos intuitions et nos jugements concernant les éléments de la langue naturelle dont

[26] La théorie des preuves rend cela manifeste (contrairement à l'approche tarskienne) : en y formulant les calculs de Lambek, la logique linéaire et la logique de la pertinence par exemple, on voit clairement qu'elles appartiennent à une même famille de structure mathématique qui peut être rangée sous « Logique » indépendamment des différentes applications possibles. Avec ses "$A \wedge B$ » est vraie ssi A est vraie *et* B est vraie, Tarski reste très « proche » de la langue naturelle…et de manière artificielle : on présuppose qu'il y ait un « et » de disponible dans le métalangage. Pour le justifier, on a besoin d'un méta-métalangage etc. « Turtles all the way down! », pour reprendre Girard (2007).

il faut rendre compte formellement et une logique « rude » *n'est pas* à sens unique. Les *contraintes purement formelles* qui pèsent sur l'élaboration d'une logique « rude » sont susceptibles de *sur-générer*, i.e. de reconnaître comme valides des inférences/arguments qui, intuitivement, ne le sont pas, et/ou de *sous-générer*, i.e. de ne pas reconnaître comme valides des inférences/arguments qui, intuitivement, le sont[27]. Il nous est alors possible de réviser les règles du système en tant que tel *ou* de réviser nos intuitions quant à la validité informelle des inférences/arguments en question. Dans la mesure où nous faisons appel à certains systèmes pour *formaliser* les arguments et ainsi obtenir une précision, une rigueur et un certain niveau de généralité que la langue naturelle ne possède pas, la deuxième attitude n'apparaît pas moins pertinente que la première. Pourquoi ne pas adopter la même attitude envers les logiques « lisses » ?

Un exemple pour le moins intéressant d'une logique « lisse » qui nous offre une compréhension des inférences en langue naturelle est celui de la logique linéaire, qui fut développée par Girard dans le cadre de ses recherches en théorie des preuves et en informatique théorique (« computer science »)[28]. La logique linéaire peut être conçue comme une logique sous-structurelle, i.e. une logique qui restreint les règles structurelles du calcul des séquents tel que formulé par Gentzen (1935). On l'obtient en rejetant les deux règles pour la contraction (ici sur la droite),

$$\frac{\Gamma \vdash A; A; \Theta}{\Gamma \vdash A; \Theta}$$

et les deux règles pour l'affaiblissement (ici sur la gauche),

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma; \mathrm{A} \vdash \Theta.}$$

[27] On doit cette distinction à Read (1995). Son argumentation se concentre sur l'analyse « tarskienne » de la notion de conséquence logique pour la logique classique du premier ordre. Il convient de remarquer deux choses : 1) les deux phénomènes que sont la sur-génération et la sous-génération sont également présents dans une analyse preuve-théorétique de la notion de conséquence logique étant donné la complétude de la logique du premier ordre; 2) il n'est pas exclu qu'une logique non-classique puisse produire ces deux phénomènes. Les arguments que nous reconnaissons comme intuitivement valides sont susceptibles de varier à travers le temps.

[28] Voir Girard (1987) pour la présentation originale de la logique linéaire.

La diminution du nombre de règles structurelles nous permet de distinguer des nouveaux connecteurs qui n'étaient pas envisageables au sein de la logique classique, que l'on considère comme la logique pleinement structurelle. La logique linéaire introduit ainsi une multitude de nouveaux connecteurs : la négation linéaire « $A^{\perp}$ », l'implication linéaire « $\multimap$ », les deux conjonctions « $\otimes$ » et « & », les connecteurs exponentiels « ! » et « ? » ainsi que les deux disjonctions « $\oplus$ » et « $\mathfrak{H}$ ». Il est possible d'offrir une interprétation *intuitive* des connecteurs linéaires qui exprime des nuances observables dans la vie courante (Girard 1997 :33). Le comportement de ces connecteurs nous offre une modélisation *dynamique* du comportement déductif en termes d'*actions* et de *réactions*. Une action a un certain prix; elle coûte quelque chose. En agissant sur mon environnement pour obtenir quelque chose, il me prend quelque chose en retour.

La logique classique offre une modélisation *statique* du comportement déductif en termes de *situations*. Ces situations sont figées dans le temps : on s'intéresse à des déductions $A \rightarrow B$ où A et B sont en quelque sorte des vérités éternelles car on pourra toujours réutiliser A. C'est ce que Girard nomme, avec l'ironie qu'on lui connaît, le principe d'inoxydabilité des formules : on utilise A pour obtenir B mais A reste intacte. Cela s'observe directement dans la règle pour la contraction, qui exprime justement la possibilité de réutiliser une hypothèse. L'implication linéaire s'intéresse plutôt à des *transformations* entre états passagers, où A est *échangé* contre B. C'est de cette manière qu'il faut interpréter $A \multimap B$: pour obtenir B, je *paye* avec A et ce faisant, je n'ai plus A. C'est le coût physique du mouvement déductif.

Prenons un exemple de la vie courante, inspiré de Girard (1997 : 34). Admettons que A signifie « j'ai 3$ », que B signifie « je peux avoir un espresso » et que C signifie « je peux avoir un café filtre ». Le fait qu'avec 3$ je puisse obtenir un espresso est adéquatement rendu par $A \multimap B$. Certes, j'obtiendrai un espresso avec 3$, mais mon environnement (ici Marie-Noël, la caissière) me le prendra, ce 3$. De même, le fait qu'avec 3$ je puisse obtenir un café filtre est adéquatement rendu par $A \multimap C$. Rendre ces deux faits respectivement par $A \rightarrow B$ et $A \rightarrow C$ nous éloigne de ce que nous tentons d'exprimer car nous pourrions alors en déduire $A \rightarrow B \wedge C$, ce qui voudrait dire qu'avec 3$ nous pouvons obtenir un espresso *et* un café filtre. On voit bien que l'idempotence de la conjonction classique, $A \wedge A = A$, ne nous permet pas de rendre compte du fait que dans la vie courante, avoir 3$ *et* 3$ n'est pas la même chose qu'avoir simplement 3$. En logique linéaire, avec $A \multimap B$ et $A \multimap C$ nous pouvons déduire $A \otimes A \multimap B \otimes C$, ce qui n'équivaut pas du tout à $A \multimap B \otimes C$; l'implication et la conjonction linéaire ne se manipulent pas comme leurs « équivalents » classiques $\rightarrow$ et $\wedge$. La conjonction multiplicative $\otimes$ (« fois ») exprime le fait que deux actions sont effectuées de manière « indépendante ». Ici, qu'avec deux pièces de 3$ ($A \otimes A$) il m'est possible d'obtenir un espresso *et* un café.

Le connecteur exponentiel « ! » rend compte d'un cas limite : celui où les ressources sont inépuisables, où la réutilisation d'une hypothèse *ad libitum* ne pose aucun problème… Ainsi, $!A$ signifie que A est pratiquement inépuisable, que je peux l'*utiliser* à volonté et donc, dans un cadre linéaire, que la *réaction* sera pratiquement négligeable. Cela se montre dans le fait qu'à partir de $!A \multimap B$ et $!A \multimap C$ nous pouvons déduire $!A \multimap B \otimes C$. On voit alors pourquoi Girard affirme que la logique classique et la logique intuitionniste ne sont que des cas limites de la logique linéaire : celles-là sont des logiques des macro-actions et celle-ci une logique des micro-actions, qui nous offre toutefois le pouvoir expressif pour retrouver leurs mécaniques déductives. Le même exercice peut être répété avec les connecteurs restants. Tout cela nous montre pertinemment l'importance des logiques « lisses » pour la compréhension et la modélisation du raisonnement en langue naturelle.[29]

2.3 Pluralisme logique et structure mathématique

L'existence d'une pluralité de logiques pose la question de la comparaison des différentes logiques entre elles (relation d'équivalence etc.) et celle de l'identification de la structure d'une logique. Devant cette multitude de systèmes formels, on est en droit de se demander s'il n'y aurait pas un moyen de leur trouver des caractéristiques communes, d'obtenir des résultats universels qui s'appliqueraient plus ou moins directement aux logiques en tant que telles. C'est là un champ de recherche qui trouve une de ses

[29] La logique linéaire possède une interprétation en *sémantique des jeux* (Blass, 1992) et une autre, inspirée de cette dernière, la ludique… Voir Girard (2001). L'importance des logiques sous-structurelles et, plus spécialement, de la logique linéaire pour la modélisation des langues naturelles a été défendue d'un point de vue antiréaliste (radicale) par Dubucs (2002) et Dubucs & Marion (2003).

formulations contemporaines dans les travaux de quelqu'un comme Béziau; des travaux qu'il range sous l'appellation « *logique universelle* » (« universal logic »), en référence à l'algèbre universelle (« universal algebra ») fondée par Birkhoff suite à ses travaux pour l'établissement d'une théorie générale des structures algébriques.[30] L'idée derrière la logique universelle consiste donc à établir une *théorie générale des logiques* en considérant celles-ci comme des *structures mathématiques*.

Partant de Boole et de Morgan jusqu'à Schröder en passant par Tarski, la tradition d'une *Algèbre de la Logique* fait justement cela, en ce qu'elle aborde les logiques en tant qu'elles peuvent être interprétés par des structures algébriques. Cette tradition fut très bien servie pas les logiciens polonais : outre les travaux de Lukasiewicz et ses disciples sur des structures propositionnelles telles que les treillis et les matrices logiques, on mentionnera un résultat charnier dans cette tradition, soit la découverte d'une correspondance entre le calcul propositionnel et une algèbre de Boole à travers l'élaboration des algèbres de Lindenbaum-Tarski (1935). On retrouve également, quoique sous un angle différent, cette idée d'une théorie générale des logiques dans les systèmes de preuves d'Hertz (1929) et les calculs des séquents de Gentzen (1935).

Notre entreprise ira dans cette direction : elle portera sur la définition d'une logique en tant que structure mathématique, commençant dans une perspective algébrique pour ensuite augmenter le pouvoir expressif et la généralité avec la perspective catégorielle. Ainsi, les premières définitions (2.3.1, 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6) que nous offrons sont formulées dans la *théorie des relations d'ordre* (« order theory ») : elles identifient une logique (propositionnelle) à un préordre[31]. Pourtant, la plupart des notions utilisées proviennent de la *théorie des catégories*, restreintes aux préordres[32]. Dans la mesure où cette restriction ne permet pas d'étendre l'analyse aux logiques du premier ordre, nous fournirons également une définition (2.3.7) touchant aux catégories ainsi qu'une notion d'équivalence entre logiques (2.3.8), comprises comme des catégories. Si

[30] Voir Béziau (2004) et (2005). Béziau cherche toutefois à rendre une certaine autonomie aux structures logiques en tant que telles, ce qui est manifeste dans sa dissertation doctorale (1995), où il propose de considérer celles-ci comme des structures-mères au sens de Bourbaki. La théorie des catégories risque encore une fois d'engloutir ces prétentions…si elle ne l'a pas déjà fait.

[31] Les définitions sont adaptées de Straßburger (2005).

[32] On notera en passant que tout préordre est une catégorie simple. En d'autres mots, la notion d'une catégorie généralise celle d'un préordre. La théorie des catégories englobe la théorie des relations d'ordre…

l'idée d'une application du vocabulaire catégoriel aux systèmes déductifs remonte plus directement aux travaux de Lambek (1967; 1968), Lawvere (1964), dans sa dissertation doctorale, expose déjà des liens entre la Logique, l'algèbre universelle et les catégories. L'utilisation de la théorie des catégories pour l'étude des logiques a de nombreux avantages : 1) elle nous offre un niveau d'abstraction suffisant à l'extraction de propriétés générales, pour ne pas dire universelles, s'appliquant uniformément à un type de structure[33]; 2) elle nous fait passer du niveau des formules, de la prouvabilité, au niveau *sous-jacent* des preuves, nous permettant d'étudier les relations pour elles-mêmes, indépendamment des objets; 3) elle nous permet de distinguer les différentes logiques et de comparer les propriétés des « structures logiques » entre elles et avec celles d'autres types de structures mathématiques puis d'envisager de nouvelles structures en jouant avec les propriétés définies.

La première définition (2.3.1) fournit le *plus petit dénominateur commun* entre logiques; elle répond à la question « qu'est-ce qu'une logique? ». Plus précisément, elle fournit le plus petit dénominateur commun entre différentes logiques *au niveau propositionnel*. La définition 2.3.2 nous offre quant à elle le *squelette* d'une structure propositionnelle en introduisant des ensembles partiellement ordonnés qui représentent la relation d'implication entre propositions. Les deux composantes qui forment 2.3.1, la relation de conséquence logique et l'ensemble des expressions bien formées, sont peu contestables, le lecteur en conviendra. La prétention qu'elle a de nous offrir un certain « point neutre » est appuyée par les remarques suivantes : 1) il n'y est question que de syntaxe; 2) elle est indifférente aux potentielles applications/interprétations d'une logique; 3) il n'y a aucune restriction de complexité ou de calculabilité sur la relation de conséquence logique. La définition fait donc *abstraction* de la manière dont on pourrait vouloir définir la relation de conséquence logique, typiquement de manière modèle-

[33] La visée de la théorie des catégories prend, avec quelqu'un comme Grothendieck, une saveur universelle au sens où elle permettrait d'unifier l'univers des structures mathématiques, un objectif qui fut celui du groupe Bourbaki (Grothendieck fut membre jusqu'à ce qu'il y ait ce désaccord avec Weil concernant les catégories…) à travers leur théorie générale des structures qui postulait trois structures-mères : algébriques, d'ordres et topologiques. Toutefois, il semble possible de faire ce travail d'unification à l'aide de la simple notion de « catégorie ». De fait, la théorie des catégories a largement dépassé l'approche Bourbakiste, en témoigne les manuels d'algèbres, de topologie etc. qui font tous usage du vocabulaire catégoriel. L'usage mathématique du terme « catégorie » commence avec Eilenberg et Mac Lane (1945). Pour une analyse historique et conceptuelle de la théorie des catégories, voir Marquis (2009).

théorétique et/ou preuve-théorétique. Plus encore, les points (1) et (2) sont cohérents avec la distinction logique/théorie logique telle que formulée plus haut. Les définitions suivantes (2.3.4, 2.3.5, 2.3.6) nous permettent d'établir des concepts (homomorphisme, isomorphisme, équivalence) pertinents à la comparaison des logiques entres elles, i.e. à leurs manipulations[34].

Définition 2.3.1 Une logique $\mathcal{L} = (\mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \Rightarrow_{\mathcal{L}})$ est un ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ d'*expressions bien formées* pris avec une relation binaire $\Rightarrow_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, la *relation de conséquence*, qui est transitive et réflexive.

Dans le but d'exclure les structures mathématiques *aléatoires*, la seule contrainte théorique sur la relation de conséquence est qu'elle soit *réflexive* et *transitive*. Une logique est donc un *préordre* : pour tous les éléments A, B, C… de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, la relation de conséquence $\Rightarrow_{\mathcal{L}}$ vérifie les propriétés suivantes : $A \Rightarrow A$; si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$ alors $A \Rightarrow C$. Suivant l'usage, $A \Rightarrow B$ se lit « B est une conséquence logique de A ». Informellement, la relation de conséquence est un sous-ensemble du produit cartésien de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ sur lui-même, i.e. un sous-ensemble de l'ensemble des *paires* formées à partir de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. La relation de conséquence peut tenir pour une seule formule A ($\Rightarrow$ A), ou entre une suite finie de formules Γ et une seule conclusion A ($\Gamma \Rightarrow$ A). On notera que cette définition est équivalente à :

Définition 2.3.2 Une logique $\mathcal{L} = (\mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \mathbb{T}_{\mathcal{L}})$ est un ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ d'*expressions bien formées* pris avec une relation ensembliste $\mathbb{T}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, l'ensemble des *théorèmes* de $\mathcal{L}$.

Pour toute logique $\mathcal{L}$ qui a accès à un conditionnel $\supset$ et une constante de vérité V, cela se voit très clairement lorsque l'on garde en tête le théorème de la déduction : $A \Rightarrow_{\mathcal{L}} B$ si et seulement si $A \supset B \in \mathbb{T}_{\mathcal{L}}$ et $A \in \mathbb{T}_{\mathcal{L}}$ si et seulement si $V \Rightarrow A$. Par exemple, si $\mathcal{L}$ est une logique dite « classique », elle aura une relation de conséquence classique au

[34] Pour approfondir l'étude des logiques en tant que structures propositionnelles, on consultera Restall (2000), qui dévoue la deuxième partie de son ouvrage sur les logiques sous-structurelles aux définitions et manipulations algébriques des structures logiques ainsi qu'à l'approche par la théorie des catégories. On consultera Rasiowa (1974) pour des résultats algébriques concernant les logiques non-classiques et l'ouvrage de Mac Lane et Birkhoff (1967) pour une introduction à l'algèbre moderne. Pour l'approche catégorielle, voir Scott et Lambek (1986) et les travaux sur la théorie des topos, notamment Mac Lane et Moerdijk (1992).

sens où le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ qu'elle formera correspondra à l'ensemble des théorèmes dits « classiques ». Enfin, la définition 2.3.1 n'impose aucune restriction sur la cardinalité de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ et on remarquera qu'elle fait également abstraction de la structure de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$: bien que l'existence d'un ensemble d'expressions bien formées présuppose que $\mathcal{L}$ ait un alphabet, la définition ne se préoccupe pas de la composition de celui-ci (constantes logiques etc.).

Pour représenter la *relation d'implication* entre les propositions d'une logique, le cœur ou squelette d'une structure propositionnelle, il nous faut également demander que la relation binaire soit *antisymétrique* : si $A \leq B\ et\ B \leq A$ alors $A = B$. Si A implique B et que B implique A, c'est qu'ils ont la même *force inférentielle* et qu'ils sont donc identiques au sein de la structure propositionnelle. L'ajout de cette condition nous donne un *ordre partiel* (« partial order ») :

Définition 2.3.3 Le *squelette* d'une logique $\mathcal{L}$ est l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{A}_{\mathcal{L}} /\Leftrightarrow,\ \leq)$ où $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} /\Leftrightarrow$ est l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ sous $\Leftrightarrow$, et où $\leq$ est définit par : $[A]_{\Leftrightarrow} \leq [B]_{\Leftrightarrow}$ si et seulement si $A \Rightarrow B$.

Définition 2.3.4 Un *homomorphisme* F entre deux logiques $\mathcal{L} = (\mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \Rightarrow_{\mathcal{L}})$ et $\mathcal{M} = (\mathcal{A}_{\mathcal{M}}, \Rightarrow_{\mathcal{M}})$ est une fonction monotone $F\colon \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$: si $A \Rightarrow_{\mathcal{L}} B$ alors $F(A) \Rightarrow_{\mathcal{M}} F(B)$.

Cette notion algébrique est essentielle : étant donné deux structures $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, une fonction $F\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ est un *homomorphisme*, i.e. un *mapping* qui préserve la structure en associant les formules de $\mathcal{L}$ aux formules de $\mathcal{M}$, si et seulement si elle remplit ces deux conditions:

1. (*Préservation de l'ordre*) : pour tout $A, B \in \mathcal{L}, si\ A \leq B$ alors $F(A) \leq F(B)$.
2. (*Préservation des opérateurs*) : pour tout opérateur $o \in O_{\mathcal{L}}$, pour chaque $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{L}, F(o(A_1, \ldots, A_n) = o\big(F(A_1), \ldots, F(A_n)\big)$.

Dans le vocabulaire catégoriel, on remarquera que c'est simplement un foncteur.

Définition 2.3.5 Un *isomorphisme* F entre deux logiques $\mathcal{L} = (\mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \Rightarrow_{\mathcal{L}})$ et $M = (\mathcal{A}_{\mathcal{M}}, \Rightarrow_{\mathcal{M}})$ est une fonction bijective $F: \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$, où F et F^{-1} sont tout les deux monotones, i.e. que $A \Rightarrow_{\mathcal{L}} B$ si et seulement si $F(A) \Rightarrow_{\mathcal{M}} F(B)$.

Définition 2.3.6 Deux logiques $\mathcal{L} = (\mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \Rightarrow_{\mathcal{L}})$ et $\mathcal{M} = (\mathcal{A}_{\mathcal{M}}, \Rightarrow_{\mathcal{M}})$ sont *équivalentes* s'il existe deux fonctions monotones $F: \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ et $G: \mathcal{A}_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, tel que pour toute formule $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ nous avons $A \Leftrightarrow_{\mathcal{L}} (G(F(A))$ et pour toute formule $B \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ nous avons $B \Leftrightarrow_{\mathcal{M}} (F(G(B))$[35].

On notera qu'un isomorphisme entre deux logiques est *plus restrictif* (donc plus « fort ») qu'une relation d'équivalence car la fonction bijective ne nous permet pas de comparer des logiques ayant différentes *cardinalités*[36]; une indésirable restriction. Ces définitions sont ici restreintes aux préordres…mais pour transférer cette analyse au niveau des logiques du *premier ordre* (et d'ordres supérieurs), il nous faut passer au sein de la théorie des catégories en considérant une logique comme une catégorie[37]:

Définition 2.3.7 : Une catégorie *C* peut être décrite comme un ensemble *Ob*, les membres de celui-ci étant les *objets* de *C*, qui satisfont les conditions suivantes :

1. (Morphisme) : Pour toute paire *X, Y* d'objets, il existe un ensemble *Hom(X,Y)*, qui est la classe de tous les *morphismes* de *X* vers *Y* dans *C*. Si f est un morphisme de *X* vers *Y*, on écrit $f: X \longrightarrow Y$.
2. (Identité) : Pout tout objet *X*, il existe un morphisme $id_X: X \longrightarrow X$ dans *Hom(X,X)*, que l'on nomme l'*identité* de *X*[38].
3. (Composition) : Pour tout triplet *X*, *Y* et *Z* d'objets, il existe une relation binaire partielle de *Hom(X,Y)* × *Hom(Y,Z)* vers *Hom(X,Z)*, que l'on nomme la

[35] $B \Leftrightarrow_{\mathcal{M}} (F(G(B))$ est un cas très simple de foncteur adjoint.

[36] C'est l'idée derrière un foncteur adjoint : il nous est possible d'avoir une paire de foncteurs adjoints entre une catégorie ayant *un* objet et une autre en ayant un nombre *non-dénombrable*. D'un point de vue catégoriel, elles sont « identiques ».

[37] Voir Marquis, Jean-Pierre, "Category Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2011 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/category-theory/.

[38] Cela nous permet d'oublier *X* pour se contenter de parler de son identité, à travers l'utilisation du morphisme id_X . Les morphismes d'identité nous permettent donc de faire abstraction des objets…d'oublier ces fameux « objets logiques », avec d'intéressantes conséquences pour l'ontologie.

composition des morphismes dans *C*. Si $f: X \longrightarrow Y$ et $g: Y \longrightarrow Z$, la composition de f et g est noté $(g \circ f): X \longrightarrow Z$.

À leur tour, ces trois conditions satisfont les axiomes suivants :

(*Identité*) : Si $f: X \longrightarrow Y$, alors $(id_Y \circ f) = f = (f \circ id_X)$.

(*Associativité*) : Si $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ et $h: Z \longrightarrow W$, alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Les objets d'une catégorie peuvent êtres conçus comme des *formules* (A, B,…), les morphismes comme des *preuves* - où les démonstrations apparaissent comme des *fonctions* - et les opérations sur les preuves comme des *règles d'inférence*. Notons qu'une catégorie est caractérisée par ses morphismes et non ses objets : le passage au sein de la théorie des catégories nous éloigne d'un simple « B est une conséquence logique de A » pour concentrer notre attention sur le *contenu* des *différentes preuves* de $A \Rightarrow B$. L'idée consiste à écrire $f: A \longrightarrow B$, nous permettant ainsi de *parler* d'une preuve f de B à partir de A. C'est un changement de niveau qui nous expose clairement la *pluralité* des démonstrations/déductions *possibles* de $A \Rightarrow B$.[39] On s'intéresse ici aux structures et aux interactions entre elles plutôt qu'aux composantes des morphismes.

En passant des préordres aux catégories, chaque paire *A,B* d'ebf est désormais équipée d'un ensemble (possiblement vide) de *morphismes* partant de *A* vers *B*. Ce qui était un homomorphisme est désormais un *foncteur F* entre deux logiques (deux catégories) $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, i.e. un *mapping* qui préserve la structure entre celles-ci, soit l'identité et la composition des preuves. Conséquemment, la notion d'équivalence change pour :

[39] C'est ce qui fait dire à Girard (2007 :6) qu'un passage au niveau de la théorie des catégories « ébauche un statut du *sujet* [en Logique], qui s'exprime à travers le choix des *morphismes* », car il est explicite, dans ce cadre, qu'il y a plusieurs « façons » d'aller de *A* à *B*. C'est un passage du pourquoi au comment…du niveau de la prouvabilité (de la vérité) au niveau sous-jacent des fonctions, des démonstrations comme morphismes « catégoriques ». Un exemple … Si l'on exprime généralement le syllogisme *Barbara* par $A \Rightarrow B; B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$, on s'aperçoit qu'en tant que composition catégorique, *Barbara* exprime la *composition des morphismes* dans une catégorie donnée : si $f: A \longrightarrow B\ et\ g: B \longrightarrow C, alors\ f \circ g: A \longrightarrow C$.

Définition 2.3.8 : Deux logiques $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont *équivalentes* s'il existe des foncteurs $F: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ et $G: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$, tel que pour toute formule A de $\mathcal{L}$ et toute formule B de $\mathcal{M}$ nous avons que $A \cong G(F(A))$ et $B \cong F(G(B))$[40].

Cela nous offre le slogan suivant : deux logiques sont *identiques* si et seulement si elles sont *équivalentes* en tant que catégorie. Nous poursuivrons toutefois notre analyse en revenant au niveau propositionnel (aux définitions restreintes aux préordres), ce qui est amplement suffisant pour les besoins de la cause, l'essentiel des différences entre logique classique et non-classiques apparaissant déjà à ce niveau. Donc, dans la mesure où deux logiques $\mathcal{L} = (\mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \Rightarrow_{\mathcal{L}})$ et $\mathcal{M} = (\mathcal{A}_{\mathcal{M}}, \Rightarrow_{\mathcal{M}})$ sont des préordres et que l'existence de deux *fonctions monotones F* et *G* nous assure leur équivalence en tant que préordres, la définition 2.3.4 offre le slogan suivant : deux logiques (propositionnelles) sont *identiques* si et seulement si elles sont *équivalentes* en tant que préordres (Straßburger 2005 : 138). Cette définition nous permet de faire deux choses jugées essentielles dans le contexte : (1) reconnaître comme équivalentes deux formulations alternatives d'une « même logique » (les variations notationnelles mises à part[41]) et (2) distinguer, parmi les logiques connues, celles que l'on considère différentes les unes des autres. Pour exemplifier le premier point, prenons le calcul propositionnel, désormais *CP*, formulé en termes de système déductif (à la Hilbert). Typiquement, les différences entre formulations résident dans le choix des constantes logiques primitives et/ou le choix des axiomes. Le *desideratum* est simple : notre définition doit juger équivalentes les différentes formulations de la « même logique », ici *CP*. Dans son *Begriffsschrift*, Frege avait choisit $\{\supset, \neg\}$ comme ensemble de constantes logiques primitives et les axiomes suivants[42] :

(1) $p \supset (q \supset p)$
(2) $\big(p \supset (q \supset r)\big) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
(3) $\big(p \supset (q \supset r)\big) \supset (q \supset (p \supset r))$
(4) $(p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$

---

[40] Cette définition provient de Straßburger (2005). Ici, $A \cong G(F(A))$ signifie un *isomorphisme* au sens catégoriel, i.e. qu'il existe deux morphismes $f: A \longrightarrow G(F(A))$ et $g: G(F(A)) \longrightarrow A$, tel que $f \circ g = id_{G(F(A))}$ et $g \circ f = id_A$.

[41] La définition ne devrait pas être affectée par les conventions typographiques qu'adoptent les différents auteurs, e.g. l'utilisation de $P.Q$ dans un système, $P\&Q$ dans un autre etc. pour exprimer la conjonction.

[42] La formulation moderne des axiomes est tirée de Kneale W. & M. Kneale (2008 : 524).

(5) $\neg\neg p \supset p$
(6) $p \supset \neg\neg p$

Une formulation alternative à celle de Frege est offerte par Russell et Whitehead dans leurs *Principia*. Les auteurs prennent $\{\vee, \neg\}$ comme ensemble de constantes primitives et offrent les axiomes suivants (à partir de $\{\vee, \supset\}$) [43] :

(1) $(p \vee p) \supset p$
(2) $q \supset (p \vee q)$
(3) $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
(4) $\big(p \vee (q \vee r)\big) \supset ((q \vee (p \vee r))$
(5) $(q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$

Nommons respectivement ces deux systèmes S et R. Nous avons donc $S = (\mathcal{A}_S, \Rightarrow_S)$ et $R = (\mathcal{A}_R, \Rightarrow_R)$, la structure de $\mathcal{A}_S$ différant de celle de $\mathcal{A}_R$: à titre de constantes logiques primitives, S utilise l'ensemble $\{\supset, \neg\}$ et R l'ensemble $\{\vee, \neg\}$. Cette différence est toutefois inoffensive lorsqu'on se rappelle que la définition 2.3.1 fait abstraction de la structure de l'ensemble des expressions bien formées d'une logique. Pour ce qui est de la relation de conséquence logique, si S et R génèrent effectivement le même ensemble de théorèmes, alors, suivant 2.3.6, toute formule A qui appartient à $\mathcal{A}_S$ sera équivalente à une formule A de $\mathcal{A}_R$ étant donné le foncteur adjoint $A \Leftrightarrow_S (G(F(A))$, et toute formule B qui appartient à $\mathcal{A}_R$ sera équivalente à une formule B de $\mathcal{A}_S$ étant donné $B \Leftrightarrow_R (F(G(B)$. Toute paire $A \Rightarrow B$ de $\mathcal{A}_S$ sera donc équivalente à une paire $A \Rightarrow B$ de $\mathcal{A}_R$. Bref, en d'autres mots : $\{\Rightarrow_S \subseteq \mathcal{A}_S \times \mathcal{A}_S\} \Leftrightarrow \{\Rightarrow_R \subseteq \mathcal{A}_R \times \mathcal{A}_R\}$. Par voie de conséquence (voir 2.3.2), les relations de conséquence logique $\Rightarrow_F$ et $\Rightarrow_R$ correspondent toutes les deux à l'ensemble des théorèmes « classiques » que l'on associe à *CP*. Ainsi, $F = (\mathcal{A}_F, \Rightarrow_F)$ et $R = (\mathcal{A}_R, \Rightarrow_R)$ sont équivalents en tant que *préordres* étant donné $F: \mathcal{A}_R \longrightarrow \mathcal{A}_S$ et $G: \mathcal{A}_S \longrightarrow \mathcal{A}_R$, donc identiques en tant que logiques.

On voit aisément pourquoi la définition d'équivalence entre logiques est également en mesure de distinguer les différentes logiques connues. Par exemple, une

[43] Idem pour la formulation. Cet ensemble d'axiomes manque à une certaine élégance formelle : Russell et Whitehead ont choisit $\{\vee, \neg\}$ comme ensemble de constantes primitives mais ont utilisés $\{\vee, \supset\}$ dans leur formulation des axiomes. Pourtant, dans les *Principia*, l'implication est définit à l'aide de la disjonction et la négation…

logique intuitionniste $I = (\mathcal{A}_I, \Rightarrow_I)$ et une logique classique $C = (\mathcal{A}_C, \Rightarrow_C)$ ne peuvent pas avoir la même relation de conséquence logique, suivant 2.3.1 et 2.3.6, car $\Rightarrow_C$ contient $\neg\neg A \Rightarrow A$ (voir le cinquième axiome de Frege) tandis que $\Rightarrow_I$ ne le contient pas. En d'autres mots : $\{\Rightarrow_I \subseteq \mathcal{A}_I \times \mathcal{A}_I\} \not\Leftrightarrow \{\Rightarrow_C \subseteq \mathcal{A}_C \times \mathcal{A}_C\}$. Cela suffit à montrer qu'ils ne sont pas équivalents en tant que préordres; qu'ils sont deux logiques *distinctes*. La même remarque nous permet de discriminer entre la logique de la pertinence et la logique classique, la logique linéaire et la logique de la pertinence etc. Les résultats montrant la capacité de 2.3.6 à distinguer entre les différentes logiques modales, généralement considérées come des extensions (suppléments) de la logique classique, sont présentés dans Pelletier et Urquhart (2003).

Avec ces définitions en main, nous sommes en mesure d'établir une forme primitive de pluralisme logique que l'on nommera, suivant Cook (2010), le pluralisme logico-mathématique (PLM) :

PLM : Il existe plus d'une structure mathématique qui satisfait 2.3.1 (et 2.3.7).

L'importance de la vérité de PLM tient au fait que les versions plus élaborées de pluralisme logique le présuppose. Malgré cela, deux structures mathématiques qui satisfont 2.3.1 ne sont pas des logiques rivales[44]. La rivalité entre logiques ne survient qu'au moment où il est question de les appliquer, et c'est à ce moment précis que l'existence d'une pluralité de logiques (au sens de PLM) devient intéressante d'un point de vue philosophique[45]. Devant l'application d'une logique à un phénomène quelconque, qu'il soit linguistique ou autre, on verra très rapidement surgir la question de l'adéquation et de la pertinence de cette logique pour l'étude du phénomène en question.

---

[44] On pourrait vouloir objecter à cela que deux logiques peuvent êtres rivales indépendamment des considérations liées à leurs applications : pour ce qui est de leurs caractéristiques purement formelles, métalogiques. Or on voit mal comment de telles propriétés pourraient avoir une importance quelconque hors d'un cadre où il est question d'appliquer les logiques…

[45] Il est intéressant de remarquer qu'en supposant qu'une logique codifie *d'entrée de jeu* nos pratiques inférentielles, Beall et Restall sont amenés à nous dire que deux logiques qui modélisent différemment nos inférences, l'une déclarant un argument valide l'autre le déclarant invalide, ne sont pas rivales (2006, p.44). Or tout l'enjeu du révisionnisme suppose très naturellement que deux logiques qui offrent des verdicts incompatibles sur la validité d'un argument soit précisément, pour cette raison même, des logiques rivales, et il ne semble pas y avoir de bonnes raisons d'aller à l'encontre de cela. La prochaine section appuiera directement cette affirmation.

Chapitre 3

Monisme vs pluralisme

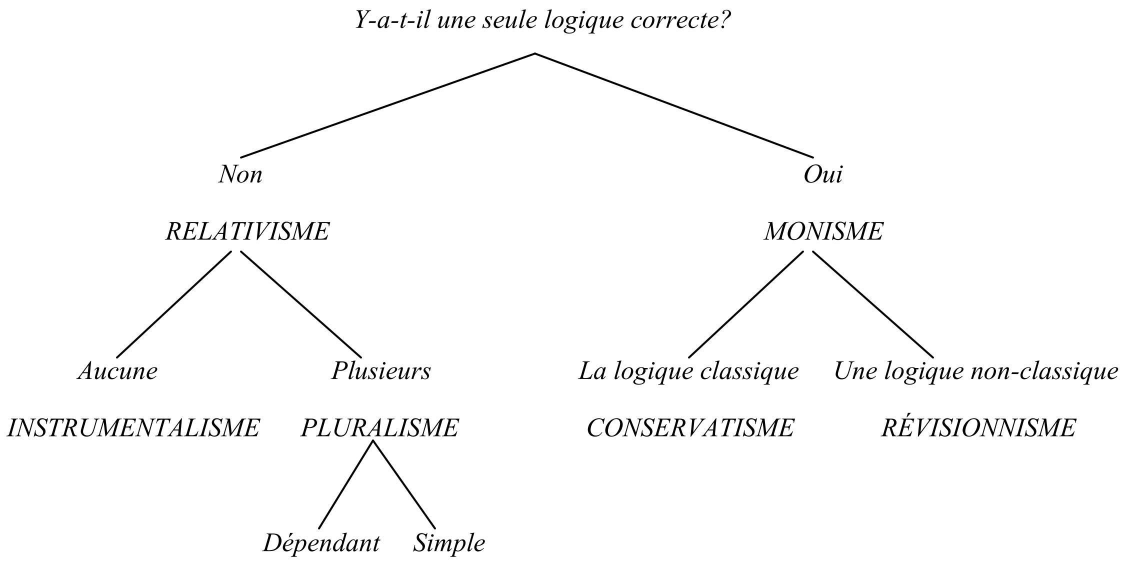
Une centaine d'années avant l'invention de la logique moderne par Frege et Russell, Kant nous disait, dans sa *Critique de la Raison Pure* (1781), que la Logique – ici la syllogistique aristotélicienne telle que modifiée par les logiciens médiévaux…– était incorrigible, inaltérable, au sens où elle était une science achevée. En un sens très précis, nous n'avons pas besoin d'argumenter pour la *possibilité* d'une révision d'une logique quelconque car cela est *déjà arrivé* : la logique aristotélicienne n'a pas été *complétée* par la logique classique mais bel et bien *remplacée et révisée* par celle-ci car la première est inconsistante avec la seconde (Priest 2003 : 454). De nos jours, l'existence d'une pluralité de logiques est un fait de l'Histoire des sciences, comme nous l'avons déjà remarqué, et cette pluralité contient (mais n'est pas épuisée par) l'ensemble des logiques non-classiques, qui prétendent réviser la logique classique sous un aspect ou un autre. Malgré cette multitude de systèmes formels, il est ouvert à quiconque d'argumenter pour le *monisme* ou le *relativisme* en tant que positions philosophiques, soit en jouant avec l'idée qu'une logique puisse être *correcte ou incorrecte*. Après avoir articulé les différentes positions théoriques que l'on peut ranger sous « monisme » et « relativisme », on s'attardera à caractériser l'enjeu du révisionnisme, lequel donne tout son sens au débat qui met en jeu ces deux « catégories » de positions, pour ensuite offrir un argument contre la thèse qui veut que le conflit entre logiques rivales soit apparent.

3.1 Le terrain de jeu

À la question de savoir s'il n'y a qu'une seule logique correcte, le moniste répond par « oui ». Le moniste qui soutient que seule la logique classique est correcte peut-être considéré comme un *conservateur* étant donné la priorité historique de celle-ci. Sans trop discriminer, cela importe peu dans le moment, on rangera sous l'étiquette « logique classique » le calcul des propositions, la logique du premier ordre avec ou sans égalité et la logique du second ordre, cette classification n'étant pas sans pertinence historique dans la mesure où les systèmes des *Grundgesetze der Arithmetik* et des *Principia Mathematica* les contiennent toutes les trois. À l'opposé, un moniste qui soutient que seule une logique non-classique est correcte peut-être considéré comme un *révisionniste*.

À la question de savoir s'il n'y a qu'une seule logique correcte, le relativiste répond par « non ». Celui-ci peut tout simplement vouloir nous dire, par ce « non », quelque chose comme : la bonne explication de X (de ce que c'est qu'une « logique correcte ») est une fonction d'un ensemble de faits indépendants Y. À proprement parler, cela fait de lui un *relativiste*. Mais il peut également vouloir nous dire qu'il y a plusieurs bonnes explications de X, ce qui ferait de lui un *pluraliste*. Ces deux positions sont indépendantes : le relativisme implique un pluralisme seulement si l'on fait l'hypothèse supplémentaire qu'il existe *plusieurs* ensembles de faits indépendants qui peuvent être insérés dans Y, et il n'y a pas de bonnes raisons d'éliminer la possibilité d'un pluralisme qui n'impliquerait pas un relativisme; une sorte de pluralisme *ceteris paribus* (Cook 2010 :493). Partant du fait qu'une forme de relativisme n'est intéressante que dans la mesure où elle suppose un pluralisme, Cook (2010) introduit la définition suivante : une explication de X est un *pluralisme dépendant* s'il existe une multitude de bonnes explications de X et que cette multitude est générée par un relativisme sous-jacent. Conséquemment, un *pluralisme simple* sera une forme de pluralisme qui n'implique pas de relativisme.

En répondant par ce « non », le « relativiste » peut également vouloir dire qu'il rejette les termes mêmes dans lesquels la question est posée, soit en rejetant l'idée de la « correction » d'un système logique. Dans cette perspective, cela ne fait pas de sens de dire qu'une logique est correcte ou incorrecte. Cette position est celle de l'*instrumentaliste*, qui permet toutefois que l'on se pose une question d'ordre pragmatique : étant donné certains buts fixés, lequel de ces systèmes est le plus efficace, fertile, économique…etc. Ces positions alternatives peuvent être résumées par la figure suivante[46] :



3.2 L'enjeu du révisionnisme

Le débat philosophique qui nous intéresse plus spécialement ici est celui entre pluralisme et monisme. La perspective dans laquelle se pose la question de savoir s'il n'y a qu'une seule logique *correcte* est celle de l'application canonique d'une logique, i.e. celle d'une modélisation de nos pratiques inférentielles dont le but est de départager les inférences valides des inférences invalides à travers l'utilisation d'une théorie logique[47]. Le moniste affirmera qu'il n'y en a qu'une seule et le pluraliste, qu'il y en a plusieurs. Toute logique qui atteint à un moment donné de l'histoire, suite à une série d'événements contingents, le statut de système « standard » ou « classique » est susceptible d'être révisée. Dans l'optique de l'application canonique d'une logique, la révision d'un système par un autre peut être conçue comme une forme d'incompatibilité entre les deux au niveau des verdicts qu'ils émettent concernant la validité d'un type d'inférence. C'est en ce sens que Priest (2003) dit de la logique aristotélicienne qu'elle a été révisée par la logique de Frege-Russell : certaines inférences qui sont valides au sein

---

[46] Celle-ci est inspirée de Haack (1978 :225) et plus directement de Engel (1989 : 362).

[47] Nous n'utiliserons pas systématiquement le mot « théorie logique » lorsqu'il sera question de parler de l'application d'une logique. Toutefois, le lecteur restera conscient du fait qu'une logique est un système formel indépendamment des considérations liées à son application et que celle-ci nécessite donc l'utilisation d'une théorie logique.

de la syllogistique aristotélicienne sont déclarées invalides par la logique classique. Bien que ce ne soit pas le cas de la logique classique vis-à-vis de la logique aristotélicienne, la grande majorité des logiques dites non-classiques ont été élaborées en opposition au système qu'elles révisent : la logique classique. La motivation derrière ces révisions consiste à croire que la *modélisation* de nos pratiques inférentielles offerte par la logique classique est incorrecte.

Tous les logiciens tenants d'un système non-classique ne déclarent pas l' « incorrection » de la logique classique avec la même force. Certains semblent dire que leur système doit *remplacer* la logique classique au sens où il devrait être utilisé au détriment de celle-ci (dans une perspective d'application locale ou globale), d'autres que leur logique devrait être utilisée *en plus* de la logique classique. C'est la remarque qui menait Haack (1996 :2) à distinguer, au sein des logiques non-classiques (dites « alternatives » dans son livre), des systèmes rivaux et des systèmes enrichis. Par « logiques non-classiques », on entendra ici, en accord avec la distinction de Haack, l'ensemble des logiques qui se présentent comme des rivales ou des enrichissements à la logique crée par Frege et Russell puis affinée par plusieurs générations de logiciens[48]. Les tenants de systèmes *rivaux* affirmeront *généralement* que la logique classique est *fautive* dans la mesure où elle déclare valides certaines inférences qui (intuitivement) ne le sont pas et/ou elle admet certains théorèmes (intuitivement) indésirables et/ou certains de ces concepts métathéoriques (conception de la validité, de la vérité etc.) sont inadéquats. Ce n'est pas seulement le système formel qui est susceptible d'être révisé, mais la *théorie logique* toute entière[49]. Les tenants de systèmes qui *enrichissent* la logique classique affirmeront généralement que cette dernière est *inadéquate* dans la mesure où son vocabulaire logique est trop pauvre pour générer des théorèmes/inférences valides désirables pour ne pas dire vraies. Suivant cette première définition, il est évident que *certaines utilisations* d'un système rival seront incompatibles avec l'utilisation de la logique classique. De l'autre côté, l'utilisation d'un système enrichi ne pose aucun

[48] Cette définition est courante. Plus récemment, on la retrouve dans le manuel d'introduction aux logiques non-classiques de Priest (2008).

[49] Certains remettront en question des concepts métalogiques faisant partie de la métathéorie de la logique classique. C'est par exemple le cas de Dummett, qui rejette la notion de vérité (le principe de bivalence) utilisée en logique classique, et Read, qui rejette la notion de conséquence classique (l'analyse tarskienne).

problème de compatibilité puisque la correction de la logique classique qu'il opère consiste en un *ajout* au niveau du vocabulaire logique - cela justifie que l'on range sous la catégorie « enrichis » les systèmes S1-S5 de Lewis, bien qu'ils aient été développé dans le but de remédier aux paradoxes de l'implication matérielle par la formalisation d'un conditionnel plus stricte[50]. Il apparaît alors que la querelle entre monistes et pluralistes est plus substantielle et intéressante lorsqu'il est question du choix entre systèmes rivaux, leur présumée incompatibilité pour cause. Le reste en tiendra compte…

Suivant ces distinctions, une liste non-exhaustive mais utile des logiques non-classiques fréquemment discutées dans la littérature contemporaine pourrait être la suivante (le système L_j de Gentzen[51] et le système P_n de Post mis à part, l'élaboration de ces logiques a été motivée par des considérations d'ordre philosophique):

Systèmes rivaux :	***Systèmes enrichis :***
Logique intuitionniste	*Logiques modales ontiques: N, K, T, S_2, S_3 etc.*
Logique linéaire	*Logiques modales non-ontiques :*
Logiques de la pertinence	*- Logiques épistémiques*
Logiques paraconsistantes	*- Logiques déontiques*
Logiques polyvalentes :	*- Logiques temporelles etc.*
• *L_3, L_n (Lukasiewicz)*	
• *K_3 (Kleene), P_3, P_n (Post) etc.*	
Logique floue	
Logique quantique	

[50] En introduisant $A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{=} \Box(A \rightarrow B)$, Lewis avait la prétention de formaliser adéquatement les propositions du type « si A alors B » en *révisant* le conditionnel classique ($\rightarrow$), qui permet certains théorèmes qui « apparaissent suspect au sens commun » (Lewis 1970 :351), et ne cherchait donc pas à offrir un traitement des modalités ($\Diamond$, $\Box$) en tant que telles. Cela est sans incidence pour la classification puisque l'utilisation de S1-S5 se trouve être, en dernier lieu, compatible avec l'utilisation de la logique classique.

[51] La différence entre les systèmes de déduction naturelle N_j et N_k repose sur l'exclusion de la règle pour l'élimination de la double négation dans le premier des deux, et celle-ci est motivée par une question *d'élégance formelle*, soit la symétrie dans les règles intélim de N_j. Cette différence est équivalente à celle qui existe entre les calculs des séquents L_j et L_k, soit la restriction à un seul conséquent (« succedent ») dans le premier des deux. Voir Gentzen (1964 :293). C'est d'ailleurs l'élégance formelle du système intuitionniste qui pourrait nous amener à conclure que la déduction naturelle telle que présentée par Gentzen *est* intuitionniste, et que l'on obtient le système classique (N_k) par un *ajout*…

La tendance veut que les tenants de systèmes rivaux soient des *révisionnistes* : la logique non-classique qu'ils mettent de l'avant serait la seule qui soit correcte et devrait donc être utilisée *globalement*, la logique fautive étant inappropriée dans tous les domaines de discours. Sur une base argumentative différente, c'est le cas pour Dummett (1959) et la logique intuitionniste, Putnam (1968) et la logique quantique, Read (2006) et la logique de la pertinence, Lukasiewicz (1919) et sa logique trivalente, pour ne mentionner que ceux là. Historiquement, le monisme a été plus souvent qu'autrement défendu dans le cadre d'une application globale de la logique préférée[52]. Malgré cela, rien ne force le tenant d'un système rival à endosser cette forme de monisme car il peut très bien admettre que la logique classique soit fautive lorsqu'il est question de l'appliquer *localement*, dans un domaine de discours particulier (physique, mathématique etc.). L'intuitionnisme tel que formulé par Brouwer en fondements des mathématiques va dans cette direction : la logique classique est fautive lorsqu'il est question de raisonner en mathématique car il suffit d'y montrer $\neg\forall x\neg A(x)$ pour affirmer $\exists x A(x)$; il fallait donc réviser la logique classique en rejetant la validité *universelle* de la loi du tiers exclu $A(x) \vee \neg A(x)$ et la validité du principe d'élimination de la double négation$\neg\neg A(x) \rightarrow A(x)$. Si l'on peut voir en cela une forme de révisionnisme local, ce type de position conduit plus naturellement à une forme de *pluralisme dépendant* : il n'y pas qu'une seule logique correcte et le choix de la « bonne » logique est relatif au domaine de discours auquel nous comptons l'appliquer. Ce type de pluralisme, très proche d'un instrumentalisme, peut être relevé pour la première fois dans l'histoire de la logique moderne chez Hugh MacColl[53]. L'enjeu d'une révision de la logique classique remonte aussi loin qu'en 1880, avec les critiques de MacColl dirigées contre l'implication matérielle telle que formalisée par Frege dans son *Begriffsschrift* (1878), ce qui donna lieu à la notion d'une implication stricte (« strict implication »).

---

[52]Une théorie des révolutions en Logique est offerte par Read et Aberdein dans un chapitre de livre en développement. Voir : http://my.fit.edu/~aberdein/AltLog.pdf. Nous en avons pris connaissance trop tard pour intégrer ici leur perspective.

[53] Voir Rahman et Redmond (2008 :540).

Tout le débat concernant la révision d'une logique par une autre suppose très naturellement qu'il y ait effectivement une différence/variation quelconque entre les logiques prétendument rivales. Dans le cadre qui est ici le nôtre, soit celui de l'application canonique d'une logique, la variation peut avoir lieu au sein d'une ou plusieurs des quatre composantes des *théories logiques* en opposition : le système formel, le manuel de traduction, la sémantique et/ou la métathéorie. De manière générale et pour les cas qui nous intéresse, les différences entre systèmes rivaux s'observent au niveau *syntaxique*, i.e. au niveau de la classe des théorèmes/inférences valides du *système formel* (de la logique) en tant que tel[54]. Haack (1996 :4) offre la définition suivante :

(A) Admettons $\mathcal{L}_1$ = logique classique. $\mathcal{L}_2$ est un système *rival* à $\mathcal{L}_1$dans la mesure où la classe des ebf[55] de $\mathcal{L}_1$ et la classe des ebf de $\mathcal{L}_2$ sont identiques, mais que la classe des théorèmes/inférences valides de $\mathcal{L}_2$ diffère de la classe des théorèmes/inférences valides de $\mathcal{L}_1$.

Quelques précisions vis-à-vis A. Si l'on se rappelle les définitions de la section 2.3, la clause essentielle pour distinguer deux logiques consiste en la non-équivalence de leurs relations de conséquence logique, i.e., sous un autre angle, en la non-équivalence de leurs classes de théorèmes/inférences valides. Par exemple, la relation de conséquence d'une logique de la pertinence ($\mathcal{L}_2$) ne contiendra pas l'ebf "$A \rightarrow (B \rightarrow A)$" tandis que celle d'une logique classique ($\mathcal{L}_1$) la contiendra. Il n'est pas obligatoire que leurs classes d'ebf soient identiques. Étant donné une variation syntaxique entre $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, ces deux logiques seront rivales dans l'unique mesure où elles prétendent toutes deux à l'application canonique. Ce dernier point est dilué dans (A) car Haack suppose qu'une logique *est* un système formel qui aspire à l'application canonique. Nous avons déjà donné nos raisons de croire qu'un système formel est une logique, indépendamment des considérations liées à son application (voir 2.1).

---

[54] Bien que certaines révisions visent directement la métathéorie et la sémantique de la logique classique, celles-ci ont plus souvent qu'autrement des répercussions syntaxiques. Un exemple au niveau de la métathéorie : le rejet de la conception « classique » de la vérité par un intuitionniste comme Dummett a comme répercussion au niveau syntaxique l'absence de la loi pour la double négation. Un exemple au niveau de la sémantique : l'ajout d'une troisième valeur de vérité (l'indétermination ontique) dans le système L_3 de Lukasiewicz réduit la classe des théorèmes/inférences valides : L_3 est syntaxiquement inclus dans la logique classique.

[55]« ebf » : *expression bien formée* suivant les règles de formation syntaxique du système formel.

Bien que la variation syntaxique entre logiques qui prétendent à l'application canonique ne semble pas être une condition *nécessaire* de la rivalité[56], la question de savoir si elle est une condition *suffisante* reste ouverte. Cette dernière question est intimement reliée à une autre : la rivalité entre logique classique et logiques non-classiques est-t-elle réelle ou seulement apparente? La capacité qu'a (*A)* à nous offrir une condition suffisante de la rivalité a été contestée sur la base suivante : se pourrait-il que l'ebf "$A \rightarrow (B \rightarrow A)$" *ne signifie pas* la même chose au sein de $\mathcal{L}_1$ qu'au sein de $\mathcal{L}_2$? C'est suivant cette même ligne qu'argumentent ceux qui adoptent la thèse selon laquelle la rivalité n'est qu'apparente. Si cette dernière s'avérait être « vraie », le débat autour de la question du pluralisme apparaîtrait foncièrement stérile.

3.3 Rivalité : apparente ou réelle?

Admettons une logique classique $\mathcal{L}_1$ et une logique paraconsistante $\mathcal{L}_2$ qui aspirent à l'application canonique. Suivant A, l'incompatibilité entre ces deux logiques rivales se manifeste entre autre dans le fait que $\mathcal{L}_1$ déclare valide le principe d'explosion "$A \wedge \neg A \vdash B$" tandis que $\mathcal{L}_2$ le déclare invalide. La stratégie de ceux qui refusent l'authenticité de la rivalité entre logique classique et logiques non-classiques ne consiste pas à nier la révision de $\mathcal{L}_1$ par $\mathcal{L}_2$ mais à affirmer que là où il y a rivalité au sens de (*A),* il y a changement de signification au niveau des constantes logiques[57]. En ce sens, l'apparente incompatibilité entre ces deux logiques est due au fait que les constantes logiques de $\mathcal{L}_1$ n'ont pas la même signification que celles de $\mathcal{L}_2$. Quine semble avoir suggéré quelque chose de ce genre dans son *Philosophy of Logic*[58] :

> "My view of this dialogue is that neither party knows what he is talking about. They think they are talking about negation, "¬", "not"; but surely the notation ceased to be recognizable as negation when they took to regarding some conjunction of the form "p&¬p" as true, and stopped regarding such sentences as implying all others. Here, evidently, is the deviant logician's predicament: when he tries to deny the doctrine he only changes the subject." (Quine, 1986 : 81)

---

[56] Il est possible par exemple que la rivalité puisse avoir lieu au niveau sémantique sans qu'il n'y ait de répercussion au niveau syntaxique, comme il semble que ce soit le cas pour les « langages présuppositionnel » de van Fraassen (1966). Voir Haack (1996 : 6).

[57] Voir Haack (1996 : 8).

[58] On retrouve le « même » argument dans *Truth and Convention* (publié en 1936) ainsi que dans *Carnap and Logical Truth* (publié en 1954).

En considérant que certaines occurrences de $A \wedge \neg A$ puissent être vraies, le logicien paraconsistant a simplement *changé de sujet* pour ne pas dire de langage; en rejetant $A \wedge \neg A \vdash B$, il nous montre très clairement qu'il ne parle plus de la négation en tant que telle. Cela nous offre donc deux possibilités : ou bien le tenant d'un système rival signifie quelque chose de différent par "$\neg$" ou bien ce qu'il dit est (logiquement) faux. Quine cherche ici à défendre la logique classique, cela va de soi. À tort toutefois, il semble croire que ces observations suffisent à établir un conservatisme. Or la situation qu'il décrit est symétrique : le logicien classique fait exactement face aux deux mêmes possibilités que le logicien non-classique. S'il croit qu'elle est asymétrique et qu'elle parle en faveur de la logique classique, c'est parce qu'il *présuppose* que le comportement de la négation en langue naturelle est celui du "$\neg$" de la logique classique (Priest 2003 :460). L'argument de Quine peut tout au plus immuniser la logique classique des attaques en provenance du camp adverse, et vice-versa…[59]

Un point qui ressort de l'argumentation de Quine est que toute différence dans la relation de conséquence logique peut être attribuable à une différence entre les langages des logiciens en cause; une variation au sens de *(A)* implique un changement de signification des constantes logiques ou, du moins, un changement de sujet de la part du logicien non-classique. On retrouve également ce point chez Carnap avec l'idée que des analyses divergentes concernant la validité d'un argument sont dues à des différences de langages[60]. Plus précisément, Carnap semble suggérer que si $A; \neg A \vdash B$ est valide dans $\mathcal{L}_1$ et invalide dans $\mathcal{L}_2$ c'est que les deux logiciens ne parlent pas du même argument : l'analyse du logicien classique est effectuée dans un langage *C*, celle du logicien paraconsistant dans un langage *P*. Ainsi, les variables *A,B…* d'une analyse dans $\mathcal{L}_1$ portent sur le langage *C,* dans $\mathcal{L}_2$sur le langage *P*…et les constantes logiques diffèrent au sens où la négation est classique dans *C*, paraconsistante dans *P* etc. En d'autres mots :

$$A; \neg_{\mathcal{L}1} A \vdash B \; et \; A; \neg_{\mathcal{L}2} A \nvdash B.$$

[59] Pour établir son conservatisme, Quine devra utiliser sa thèse de l'indétermination de la traduction. L'échec de cette tentative peut être constatée dans Haack (1996), Restall (2002) et Priest (2003).

[60] Le traitement de ce qui suit doit beaucoup à Restall (2002).

Les deux formules ne sont pas deux analyses différentes du même connecteur mais des analyses de *deux connecteurs différents*. Nous avons là deux *formes* différentes d'arguments, la lecture de l'une étant dépendante du langage *C*, l'autre du langage *P*. Ici, l'idée maîtresse de Carnap – une idée que l'on retrouve également chez Quine bien qu'il aille à contre-courant du pluralisme de Carnap en supposant que le « non » de la langue naturelle soit correctement modélisé par le "¬" classique - est qu'en acceptant différentes logiques nous sommes contraints d'accepter différents langages. Cela nous donne une forme *radicale* de pluralisme. Mais c'est un *pluralisme des formes de langages*[61]. Les tenants de systèmes rivaux parlent différents langages et une fois cet état de fait mis au jour, il ne peut plus y avoir de désaccord entre ceux-ci, admettant qu'ils connaissent désormais le langage dans lequel ils s'expriment. Les monistes obtiennent en quelque sorte l'immunité territoriale chacun de leur côté…

Un pluraliste comme Restall (2002 :432) a raison de trouver cela insatisfaisant : dans ce contexte, le pluraliste doit se contraindre à dire : « je peux lire l'argument comme ci (en fonction du langage *P*) ou le lire comme ça (en fonction du langage *C*) »[62], mais il ne peut pas dire que l'argument est valide en un *sens* et invalide en un autre sans avoir l'air d'être confus, équivoquant d'un langage à l'autre. Certes, on peut dire : « le principe d'explosion est valide *dans C* et invalide *dans P* », mais cela ne nous permet pas de se demander laquelle de ces deux analyses est correcte/incorrecte, ou encore, si elles le sont toutes les deux, car nous avons là à faire à deux langages différents. Le contenu des théories logiques en opposition est *incommensurable*. Pour qu'il y ait un débat philosophique fertile - pour (re)donner à l'enjeu du révisionnisme sa raison d'être - il faut au moins admettre la possibilité que différentes relations de conséquence logique puissent porter sur *un seul* langage, de sorte que nous puissions confronter les analyses divergentes entre elles. C'est la voie du *pluralisme logique* à la Beall et Restall[63], où l'on cherche à endosser l'existence d'une rivalité entre logiques à travers l'idée qu'il est possible qu'il y ait *plusieurs* relations de conséquence logique *correctes*, au sens où elles

[61] Le sujet sera traité en détail dans la section sur Carnap (voir section IV).
[62] En un sens, dans ce contexte, le moniste pourrait s'en tenir à : « je *veux* lire l'argument comme cela ».
[63]Beall & Restall (2006).

spécifient différemment une notion préthéorique de conséquence logique, pour un même langage L sur lequel portent les variables A,B…

En d'autres mots :

$$A; \neg A \vdash_{\mathcal{L}1} B \ \ et \ \ A; \neg A \nvdash_{\mathcal{L}2} B.$$

La thèse qui veut que la rivalité entre logique classique et logiques non-classiques ne soit qu'apparente barre donc la route à un pluralisme logique qui chercherait à répondre « non, il y en a plusieurs » à la question de savoir s'il n'y a qu'une seule logique *correcte*[64]. Pour comparer le contenu des théories logiques rivales et évaluer leur « rectitude », on doit admettre que le conflit est bel et bien réel et qu'il est donc possible que deux logiques différentes nous « parlent » des *mêmes connecteurs* tout en proposant deux analyses différentes d'un même argument.

3.4 Sémantique et constantes logiques

Pour arriver à la conclusion qu'il n'y a aucune rivalité authentique entre logiques prétendument incompatibles, encore faut-il offrir des raisons pour soutenir la prémisse qui veut qu'une variation au sens de (*A)* entraîne un changement de signification des constantes logiques. Outre la thèse quinienne de l'indétermination de la traduction, deux thèses sont généralement mises de l'avant pour appuyer cette prémisse : 1) la signification des constantes logiques est déterminée par les axiomes et/ou les règles d'inférences du système formel; 2) la signification des constantes logiques est déterminée par leurs conditions de vérités. Carnap semble avoir défendu une version de (1) :

> “. . . let any postulates and rules of inference be chosen arbitrarily; then this choice, whatever it may be, will determine what meaning is to be assigned to the fundamental logical symbols.” (Carnap, 1934: xv)

[64] Elle barre également la route à tout moniste qui veut endosser l'existence de la rivalité. C'est le cas de Read (2006) par exemple, qui cherche à nous convaincre que la seule analyse *correcte* de la notion de conséquence logique est celle que nous offre la logique de la pertinence.

Cette thèse est ici formulée dans un cadre logiciste à la Frege-Russell, i.e. dans le cadre d'une formulation des différents systèmes formels en termes de *théories axiomatiques* où l'on postule la vérité de certaines formules (les axiomes) tout en ne retenant généralement que deux (méta) règles d'inférence, soit le *modus ponens* et une règle pour la substitution des variables. Dans ce cadre, *les* constantes logiques de deux théories axiomatiques qui génèrent différentes classes de théorèmes/inférences valides auraient des significations différentes, ce qui permet effectivement d'appuyer la thèse de l'apparence du conflit entre logiques rivales. Mais (1) nous permet seulement d'appuyer adéquatement la thèse de l'apparence lorsqu'elle est formulée dans ce cadre (logiciste) car les constantes logiques sont prises *dans un tout* (la théorie axiomatique) qui diffère d'une logique à une autre, ce qui permet d'affirmer que *toutes* les constantes logiques diffèrent d'une théorie à une autre – bien que l'on puisse objecter à cette dernière affirmation que la notion de « différence de signification » est beaucoup trop vague et qu'elle laisse de côté la question de savoir s'il ne devrait pas y avoir un critère pour établir l'ampleur de la différence qui doit subsister entre deux théories axiomatiques rivales pour qu'il y ait véritablement changement de signification[65].

Formulée dans un cadre preuve-théorétique gentzenien, i.e. dans le cadre d'une formulation des différentes logiques en termes de systèmes de déduction naturelle, la thèse (1) ne permet pas d'appuyer aussi facilement l'autre, celle qui veut que le conflit soit apparent, car la signification des constantes logiques est ici déterminée par des règles d'inférence, des règles d'introduction et d'élimination (les règles *intélim*), qui sont propres à *chacune* des constantes[66]. Par exemple, la *seule* différence entre les systèmes de déduction naturelle classique (N_k) et intuitionniste (N_j) se trouve au niveau des règles intélim pour la négation :

$$(N_k :\mathrm{I}\neg)\quad \frac{\begin{matrix}[A]\\ F\end{matrix}}{\neg A} \qquad\qquad (N_k :\mathrm{E}\neg)\quad \frac{\neg\neg A}{A}$$

[65] On peut relever ce type d'argument chez Haack (1996 : 13) et plus récemment, chez Field (2009 : 345).
[66] Cette idée remonte au Gentzen des *Investigations into Logical Deduction* (1964), publiée en allemand en 1935, mais la défense du point de la sémantique preuve-théorétique n'a vue le jour qu'au milieu des années 50, avec Dummett et Prawitz.

$$(N_j : \mathrm{I}\neg)\ \frac{\begin{matrix}[A]\\ F\end{matrix}}{\neg A} \qquad (N_j : \mathrm{E}\neg)\ \frac{A, \neg A}{F.}$$

Ici, nous pouvons tout au plus affirmer que la négation n'a pas la même signification au sein de N_j qu'au sein de N_k. Certes, il y a variation au sens de *A* entre ces deux systèmes, mais rien ne nous permet d'affirmer qu'il y a changement de signification au niveau *des* constantes logiques. Il est donc de faux de dire que deux logiques distinctes *doivent* avoir des connecteurs différents : il est possible qu'il y ait une différence entre leurs classes de théorèmes/inférences valides sans que *tous* les connecteurs soient analysés différemment.

Toutefois, il est peu contestable que, dans un bon nombre de cas, les significations de certains connecteurs de deux logiques rivales diffèrent si l'on fait *l'hypothèse* que l'identité entre la signification de deux connecteurs implique l'identité de leurs conditions de vérité ou l'identité de leurs règles d'inférence. D'un point de vue modèle-théorétique par exemple, les conditions de vérité de la négation en logique classique et celles de la négation en logique intuitionniste (le tout formulé en termes de mondes possibles) sont (respectivement) les suivantes :

$$\neg A\ est\ vrai\ dans\ le\ monde\ w\ ssi\ A\ n'est\ pas\ vrai\ dans\ le\ monde\ w.$$

$$\neg A\ est\ vrai\ dans\ le\ monde\ w\ ssi\ pour\ tous\ les\ w'\ tel\ que\ w \leq w', A\ n'est\ pas\ vrai\ dans\ w'.$$

Tout comme pour les règles intélim présentées ci-haut, il est évident que, dans ce cas, les deux conditions sont distinctes et que, en vertu de l'hypothèse sur l'identité des connecteurs, le "¬" de la logique classique ne signifie pas la même chose que celui de la logique intuitionniste. De manière générale, le problème est qu'il semble que deux analyses différentes d'un « même » connecteur - ici la négation -, qu'elles soient effectuées dans un cadre preuve-théorétique ou modèle-théorétique, impliquent que nous soyons en fait en train de parler de deux choses différentes. Or en faisant appel au point de vue des logiques sous-structurelles (« substructural logics »), on s'aperçoit qu'il est possible d'analyser les constantes des logiques rivales d'une seule et même manière tout en les caractérisant pleinement à l'aide de la notion d'une règle structurelle. C'est un passage au sein d'un métacalculus qui nous permet de reconsidérer la rivalité entre logique classique et logiques non-classiques telle qu'elle nous apparaît au niveau syntaxique, i.e. au niveau des systèmes formels en tant que tels.

3.5 Les logiques non-classiques en tant que logiques sous-structurelles .

Le point de vue des logiques sous-structurelles (« substructural logics ») nous fournit une nouvelle perspective pour aborder les logiques rivales en proposant un *dénominateur commun* entre celles-ci : les règles logiques. Cela prend racine dans une hypothèse que l'on doit à Dosen: *"Two logical systems are alternative if, and only if, they differ only in their assumptions on structural deductions"* (Dosen 1989:376). En passant au niveau du métalangage déductif (un méta-calculus) qu'est le langage des séquents, on rend *explicite* les hypothèses concernant les règles structurelles qui étaient *implicites* au sein des systèmes formels ($\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 etc.$), qui sont dorénavant traités au niveau du langage-objet[67].

Les calculs des séquents tels que formulés par Gentzen comportent trois groupes de règles : les règles d'identité, les règles structurelles et les règles logiques. Les logiques sous-structurelles, qui correspondent aux logiques rivales, sont obtenues en *gardant fixe les règles logiques* puis en restreignant les règles structurelles (l'affaiblissement, la contraction et l'échange)[68]. Ces dernières gouvernent le comportement d'une série d'informations encodée dans les prémisses et la ou les conclusions d'une inférence. Leur importance apparait très clairement lorsque l'on considère le théorème de la déduction[69], lequel tient pour la grande majorité des systèmes formels :

$$\Gamma;\ A \vdash B\ si\ et\ seulement\ si\ \Gamma \vdash A \rightarrow B$$

[67]Formaliser les différentes logiques dans un calcul des séquents sans coupure permet de dévoiler des relations de « résiduation » cachées dans une formulation des logiques en termes de systèmes à la Hilbert par exemple. Le calcul des séquents nous permet d'étudier des structures résiduées (« residuated structures »), les logiques sous-structurelles, intimement reliée au comportement des treillis résidués. Voir Ono (2003).

[68] Voir Restall (2000) et Schrodër-Heister et Dosen (1993) pour une introduction au sujet.

[69] À proprement parler, le théorème de la déduction tel qu'on le trouve chez Herbrand (1930) dit seulement que "si $\Gamma;\ A \vdash B$ alors $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ ». La réciproque est triviale étant donné le *modus ponens*.

Le mode de combinaison des prémisses étant ici encodé par le point-virgule, le théorème nous indique qu'une modification de ce mode entrainera une modification du conditionnel ($\rightarrow$). Or les règles structurelles dictent justement les propriétés de la combinaison des prémisses. Ainsi, en jouant avec les règles structurelles, on sera amené à caractériser différents conditionnels (différentes sortes de déduction). Étant donné que la notion de conséquence logique ($\vdash$) et l'implication ($\rightarrow$) sont intimement liés, comme le démontre le théorème de la déduction, nous serons également amenés à considérer différentes logiques.

Une idée maîtresse de Gentzen consiste à introduire des *séquents* (certains auteurs préfèrent le terme « consécution ») soit des expressions de la forme $\Gamma \longrightarrow \Theta$, où Γ, Θ… sont des schèmes pour des *suites finies* de schèmes de formules (distinctes ou non) *A, B, C*… d'un langage-objet. Nous remplacerons ici le symbole auxiliaire $\longrightarrow$ de Gentzen par $\vdash$ [70]. Ainsi, on a $\Gamma \vdash \Theta$ pour $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots B_m$. Les formules $A_1, \ldots, A_n$ forment l'antécédent et les formules $B_1, \ldots B_m$ le conséquent (succédent). Selon l'interprétation intuitive qu'en donne Gentzen (1964 :290), $\Gamma \vdash \Theta$ signifie « la conjonction des A_i *implique* la disjonction des B_i », soit $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \supset (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$. La chose essentielle est la suivante : nous ne nous intéressons pas aux formules *A, B, C*... en tant que telles, mais uniquement à la manière dont elles apparaissent à l'intérieur du séquent, à leurs *positionnements*, pour ainsi dire. Gentzen souligne ce fait en les nommant des *S-formules*, soit des formules qui peuvent avoir plusieurs occurrences distinctes dans un séquent tout en étant considérées formellement identiques. À leur tour, les formules qui composent une dérivation (déduction) sont des *D-formules,* soit des formules dont seul le positionnement au sein de la dérivation nous intéresse. Les déductions formelles deviennent des *déductions structurelles*, i.e. des déductions qui peuvent être décrites indépendamment des constantes du langage-objet duquel on tire les antécédents et les conséquents. Suivant Dosen (1989 :365-366) et quelques autres, une hypothèse particulièrement féconde consiste à supposer que ce ne sont pas les différents systèmes

[70] Admettons que $\vdash$ caractérise la relation de déductibilité des systèmes de déduction naturelle, on remarquera que le symbole introduit par Gentzen, $\longrightarrow$, correspond au premier au sens où $\Gamma \longrightarrow \Theta$ peut être interprété comme $\Gamma \vdash \Theta$. C'est ce qui fait dire à Prawitz que le calcul des séquents est un métacalculus pour les systèmes de déduction (1965 :90).

formels ($\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 etc.$) qui ont le pouvoir d'articuler l'essentiel du concept de déduction formelle mais plutôt les systèmes à la Gentzen. Les déductions formelles *de bases* seraient donc des *déductions structurelles*. En tant que système de preuve, le calcul des séquents participe d'une *théorie générale des structures logiques* dans la mesure où son niveau d'abstraction nous permet de rendre explicite des hypothèses structurelles et, plus important encore, de faire apparaître une profonde symétrie dans les règles de la Logique à travers la coupure et le *Hauptsatz*. Le théorème de Gentzen redonne ses lettres de noblesse à la syntaxe…

Faisons ici un petit détour par Dosen (1989) et son projet d'une définition des constantes logiques en termes structurels. Inspirée de Gentzen, l'idée de Dosen consiste à introduire des règles logiques à *double sens* qui sont partagées par l'ensemble des logiques rivales. On notera que ce dénominateur commun entre logiques rivales est déjà présent dans une formulation « standard » des logiques sous-structurelles, où le groupe *fixe* de règles logiques contient au moins deux règles distinctes pour chaque constante logique. En introduisant *une* règle à double sens pour *chaque* connecteur, Dosen cherche à rendre explicite et à appuyer sa thèse principale : les constantes dites « logiques » sont des marques de ponctuations du langage-objet. Pour cela, il est essentiel que la partie supérieure de la règle soit schématique (sans constantes du langage-objet) de sorte que ce séquent soit purement structurel. Pour l'implication nous obtenons :

$$(\rightarrow) \quad \frac{\Gamma; A \vdash \Theta; B}{\Gamma \vdash \Theta; A \rightarrow B}$$

La double ligne nous indique que la règle va dans les deux sens : de bas en haut nous obtenons le *modus ponens* et de haut en bas le *théorème de la déduction*. La règle nous dit que $A \vdash B\ et\ \vdash A \rightarrow B$ sont interdéductibles : la forme logique du théorème $A \rightarrow B$ du langage-objet est ici le *miroir* d'une caractéristique structurelle des déductions, soit la relation entre une prémisse A et une conclusion B indépendamment des constantes que A et B pourraient possédés. (Dosen 1989 :367). L'implication " $\rightarrow$ " est un substitut, une marque de ponctuation du langage-objet pour la relation de déductibilité " $\vdash$ ". Ce procédé nous offre une analyse des constantes d'un langage-objet en termes structurels, soit dans le métalangage des séquents. En supposant que toute constante du langage-objet - dont la description d'une déduction (formelle) *non-structurelle* dépend - puisse être ultimement analysée en termes structurels, toute constante sera dite « logique » si et seulement si elle peut être ultimement analysée en termes structurels, i.e. à l'aide de règles à double sens.

Deux autres exemples :

$$(\wedge)\quad \frac{\Gamma \vdash \Theta; \mathrm{A} \qquad\qquad \Gamma \vdash \Theta; B}{\Gamma \vdash \Theta; A \wedge B}$$

$$(\vee)\quad \frac{\Gamma; A \vdash \Theta \qquad\qquad \Gamma; B \vdash \Theta}{\Gamma; A \vee B \vdash \Theta}$$

Cette procédure peut être répétée pour tous les opérateurs « classiques » restants ($=$, $\leftrightarrow$, $\perp$, $\forall$, $\exists$) et les deux opérateurs modaux ($\square$, $\Diamond$).

Cela dit, nous avons maintenant un groupe de règles logiques qui est partagé par l'ensemble des logiques rivales. En considérant que la logique classique est la seule logique *pleinement* structurelle, on obtient une logique rivale en restreignant les règles structurelles de celle-ci. Plus précisément, deux systèmes sont alternatifs (i.e. rivaux) si et seulement s'ils diffèrent seulement quant à leurs hypothèses sur les déductions structurelles (c'est la thèse de Dosen). Quelques exemples. On obtient la logique intuitionniste en restreignant le langage des séquents à des séquents du type "$\Gamma \vdash A$", soit des séquents avec une seule conclusion, puis en remplaçant l'affaiblissement sur la droite par:

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}$$

La logique de la pertinence est obtenue par un rejet des deux règles pour l'affaiblissement (ici sur la gauche) :

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma; \mathrm{A} \vdash \Theta}$$

La condition de pertinence entre les prémisses et les conclusions s'exprime à travers ce rejet : en présence de $\Gamma \vdash \Theta$ il se peut que nous n'ayons pas $\Gamma; A \vdash \Theta$ car le nouveau matériel A peut ne pas être *pertinent* pour la déduction. On obtient également les logiques polyvalentes de Lukasiewicz en rejetant les deux règles de contraction (ici sur la droite) :

$$\frac{\Gamma \vdash A; A; \Theta}{\Gamma \vdash A; \Theta}$$

La thèse de Dosen fournit un critère pour déterminer si deux systèmes sont rivaux, mais elle laisse de côté la question des systèmes enrichis. Pour obtenir un classement plus englobant, il suffit de tirer quelques conclusions de l'analyse des constantes du langage-objet et des hypothèses faites sur les déductions structurelles. Suivant celles-ci, différents systèmes formels surgissent soit parce qu'ils ont (i) différentes déductions structurelles et des constantes logiques ultimement analysées de la même manière, ou (ii) les mêmes déductions structurelles et des constantes logiques ultimement analysées de différentes manières, ou (iii) à la fois différentes déductions structurelles et des constantes logiques ultimement analysées de différentes manières (Dosen 1989 :377). Les systèmes rivaux se classent dans (i), les systèmes enrichis dans (ii) et les systèmes à la fois rivaux et enrichis dans (iii). Trois choses : (1) les définitions (i) et (ii) nous permettent de retrouver la classification de la section 3.2, soit l'ensemble de ce que l'on range là-bas sous et « systèmes rivaux » et « systèmes enrichis »; (2) il apparait très clairement que les logiques sous-structurelles sont rivales entre elles et non pas seulement avec la logique classique; (3) il nous est possible de générer d'autres logiques (et d'autres structures algébriques) en jouant avec les différentes propriétés des logiques sous-structurelles.

On pourrait pousser l'audace jusqu'à affirmer que la signification d'une constante logique est déterminée par la fonction qu'elle occupe au sein des règles logiques à double sens…[71] mais nous sommes déjà à bon port. Le fait est que la thèse qui veut qu'une variation au sens de *(A)* entraîne un changement de signification des constantes logiques

[71] Suivant cette idée, il n'y aurait rien de plus à dire sur la signification d'une constante logique que le fait qu'elle soit une marque de ponctuation du langage-objet. La sémantique serait ici épuisée par un critère d'ordre « ontologique »… Plus précisément - et on rejoint ici l'opinion de Wittgenstein dans le *Tractatus* – cela voudrait dire que les constantes logiques n'ont tout simplement pas de signification - au sens où nous voudrions qu'elles en aient. Curieusement, Wittgenstein nous dit également que « les signes des opérations logiques sont des signes de ponctuation » (5.4611)…

est récusée par le point de vue développée ci-haut. Au niveau syntaxique, l'incompatibilité entre les verdicts qu'émettent la logique classique et la logique intuitionniste à propos de certaines instances de la loi du tiers exclu peut être en partie attribuée aux analyses respectives qu'elles offrent de la négation (peu importe le cadre dans lequel elles sont effectuées), mais cela n'implique pas que nous soyons en présence de deux connecteurs différents car on peut s'assurer, à l'aide du langage des séquents, que ce n'est pas le connecteur qui change d'une logique rivale à une autre mais les hypothèses concernant les règles structurelles. En passant au sein d'un méta-calculi qui fait usage des concepts de *déduction structurelle* et de *séquent*, il nous est possible d'analyser les constantes de deux logiques rivales de la même manière tout en les distinguant pleinement grâce aux hypothèses structurelles qu'elles utilisent, celles-ci étant implicites au niveau syntaxique (du système formel en tant que tel).

3.6 Et alors…?

Nous l'avons déjà exposé : la thèse qui veut que le conflit entre logiques rivales ne soit qu'apparent s'appuie essentiellement sur l'idée qu'une variation entre les classes de théorèmes/inférences valides de deux logiques distinctes implique un changement de signification des constantes logiques. Or, comme nous avons tenté de le montrer ci-haut, le point de vue des logiques sous-structurelles nous offre de bonnes raisons de croire que la prémisse invoquée pour soutenir cette thèse (celle de l'apparence du conflit) est insatisfaisante pour ne pas dire inacceptable : placé devant deux analyses différentes d'un connecteur quelconque au niveau syntaxique, rien ne nous force à admettre que nous ayons à faire à deux connecteurs différents car on peut les analyser de la même manière, à l'aide des règles logiques fixes, en passant au sein du calcul des séquents. En l'absence d'arguments concluants/convaincants partant de la prémisse du changement de signification des constantes logiques pour aller vers la conclusion qui affirme l'inauthenticité du conflit entre logiques rivales, pourquoi s'obstiner à vouloir faire passer la réalité présumée de l'enjeu du révisionnisme pour de l'apparence ? Ici, il est sans doute plus convaincant de dire que le logicien non-classique est réellement en train de faire ce qu'il croit être en train de faire. C'est un plaidoyer d'innocence aisément gagné : le fardeau de la preuve est de l'autre côté, celui du camp adverse.

3.7 Variations sur un thème de Shapiro-Cook

Dans une perspective où l'on admet l'existence d'une rivalité entre logiques rivales, les différentes réponses possibles à la question de savoir s'il n'y a qu'une seule logique correcte, exception faite de l'instrumentalisme, consistent à spécifier ce que l'on entend par « correcte »; ce que l'on range là-dessous. Dans un contexte d'application *locale*, une première réponse possible est offerte par un *pluralisme dépendant* : il y a plusieurs logiques *correctes* au sens où différentes logiques modélisent correctement différents domaines de discours en fonction de différents buts théoriques. Plus récemment, cette position a été défendue par le duo Shapiro-Cook (voir Cook 2010 : 500-501), que l'on peut résumer par la citation suivante[72] :

> "… with mathematical models generally, there is typically no question of 'getting it exactly right'. For a given purpose, there may be bad models – models that are clearly incorrect – and there may be good models, but *it is unlikely that one can speak of the one and only correct model*. There is almost always *a gap* between a model and what it is a model of. "(Shapiro 2006:50)

Et c'est un point qui doit être répété : nous faisons appel à certains systèmes formels, à travers l'utilisation d'une théorie logique, pour obtenir une précision, une rigueur et un certain niveau de généralité, de formalité, que la langue naturelle ne possède pas; des *modélisations* qui idéaliseront différemment certaines caractéristiques de la langue naturelle et en simplifieront d'autres, sans parler de ces choses qui ne se formalisent pas.

Dans un contexte d'application *globale*, une réponse possible est offerte par un *pluralisme dépendant* à la Beall et Restall[73] : admettons une logique classique $\mathcal{L}_1$ et une logique intuitionniste $\mathcal{L}_2$ qui prétendent à l'application canonique, elles sont correctes au sens où elles spécifient, chacune à leur manière, une notion *préthéorique* de conséquence logique élaborée dans un cadre *modèle-théorétique*, cette spécification consistant à *théoriser* la notion de conséquence logique à l'aide du concept de « modèle tarskien »

[72] Shapiro et Cook attachent cette idée à leur « logic-as-modeling viewpoint ». De notre point de vue, un système formel *est* une logique et une logique s'applique à un phénomène linguistique à travers une *théorie logique*. On pourrait donc reprendre leur moto en changeant pour : « logical-theory-as-modeling viewpoint ».

[73] Pour deux autres réponses possibles, voir Russell (2008) et Varzi (2002). Dans le premier cas, le pluralisme dépend de ce que l'on choisira pour jouer le rôle des constituants des arguments (énoncés, propositions, jugements etc.) et dans le deuxième, de l'endroit où l'on fera passer la ligne de démarcation entre constantes logiques et non-logiques.

dans le cas de $\mathcal{L}_1$ et à l'aide du concept de « constructions » dans le cas de $\mathcal{L}_2$. C'est un pluralisme dépendant car le fait qu'une logique soit correcte dépend ici de la notion préthéorique qui est sélectionnée, et il n'y a pas qu'une seule manière de la construire, cette notion[74].

Reste la question de savoir s'il y a possibilité de défendre un *pluralisme simple* : si l'on reste au niveau de leur relation de conséquence logique en tant que telle, peut-on *simplement* dire de deux logiques qui émettent des verdicts incompatibles concernant la validité d'une ou plusieurs forme(s) d'inférence(s) qu'elles sont toutes les deux des modélisations *correctes* de nos pratiques inférentielles? Ne modifie-t-on pas remarquablement le sens de « correct » en admettant *stricto sensu* que deux modélisations incompatibles soient correctes? Dans la mesure où aucune théorie logique n'est un modèle parfait du phénomène linguistique dans toute sa généralité, il n'y a pas, comme le souligne Cook (2010 : 501), de raisons *a priori* d'éliminer une position de cette sorte, bien qu'à notre connaissance, il n'y en ait aucune dans la littérature portant sur la question du pluralisme logique.

Et maintenant, que faire du moniste? Une fois admis qu'il y a *de facto*, ne serait-ce que d'un point de vue mathématique, plusieurs relations de conséquence logique donc plusieurs logiques modélisant différemment nos pratiques inférentielles à travers le déploiement d'une théorie logique, et qu'une modélisation *x* n'a aucune chance de rendre entièrement compte à elle seule de nos pratiques inférentielles, à quoi bon dire qu'il n'y a qu'une seule de ces relations de conséquence qui soit correcte, qu'il n'y a qu'une seule vraie logique? Dans *Monism : the One True Logic,* Read (2006) nous dit que lorsqu'elle est proprement comprise, la notion informelle de conséquence logique n'est correctement formalisée que par une seule logique : la logique de la pertinence. De quel droit? Terminons avec la *conjecture* de Beall et Restall :

> ”Monism *artificially* restricts the development of logic, either by requiring that each consequence relation do too much, or by ignoring some of the important tasks for which we require consequence relations. “ (2006: 123).

[74] Notons simplement que Beall et Restall utilise la notion de vérité alors qu'on peut très bien se tourner vers l'approche preuve-théorétique (preuve) et l'approche dialogique (règle de jeu).

Chapitre 4

Carnap, le principe de tolérance et la thèse du pluralisme logique

La plupart des discussions contemporaines portant sur la question du pluralisme logique font un passage obligé par Carnap et son principe de tolérance, tel que formulé dans *La Syntaxe Logique du Langage* (1934)[75]. Il n'y a aucun doute là-dessus, l'*attitude* de tolérance mise de l'avant par ce principe, si cher à Carnap, est hautement favorable à l'existence d'une *pluralité de logiques* :

> "In it [parlant de SLL], the view will be maintained that we have in every respect complete liberty with regard to the forms of language; that both the forms of construction for sentences and the rules of transformation (the latter are usually designated as "postulates" and "rules of inference") may be chosen quite arbitrarily." (Carnap, 1964: xv)

Suivant cela, le logicien n'a aucunement besoin de justifier ses préférences pour un ensemble d'axiomes/règles d'inférence plutôt qu'un autre, une logique plutôt qu'une autre; la seule question qui ait véritablement droit de cité est celle qui concerne les *conséquences syntaxiques* associées au choix d'une forme de langage plutôt qu'une autre. Admettant qu'on puisse lui poser la question de savoir s'il n'y a qu'une seule logique correcte, Carnap répondrait certainement « non »; dans un premier temps du moins. Et c'est là, nous croyons, une des raisons pour lesquelles il est coutume de lui attribuer une forme de pluralisme logique. Pourtant, dans un cadre carnapien, cela ne fait pas de sens

[75] Désormais *SLL*. Les références sont faites à partir de Carnap (1964). Je dois immédiatement diriger le lecteur vers ce remarquable ouvrage édité récemment par Pierre Wagner, « Carnap's *Logical Syntax of Language* » (2009), qui fait le point sur l'interprétation de cette œuvre carnapienne à travers une multitude d'articles écrits par des autorités en la matière.

de dire d'une logique - et par extension, d'une forme de langage - qu'elle est correcte ou incorrecte : il n'existe rien de tel qu'une notion de « correction » qui soit transcendante par rapport aux différentes formes de langages possibles. C'est là, on le verra, une conséquence directe d'un héritage proprement frégéen. Si l'on accepte le fait que le *pluralisme logique* consiste à affirmer qu'il y a plusieurs logiques *correctes*, il n'y a aucune raison de lui attribuer cette position. À proprement parler, Carnap entretient, en philosophie de la logique et des mathématiques, une forme d'*instrumentalisme* (voir 3.1), qui prend racine dans un *pluralisme des formes de langages*, chaque forme étant incommensurable l'une par rapport à l'autre.

Comme le remarque Pierre Wagner, le pluralisme carnapien a un caractère quelque peu inusité lorsqu'il est envisagé comme un produit sortant de la tradition dans laquelle il fut formé :

> « La formation logique de Carnap ne le prédisposait nullement à une prise de position en faveur du pluralisme. Dans l'un des passages de son autobiographie intellectuelle où il est question des années 1920, Carnap cite Frege, Russell et Wittgenstein comme trois auteurs qui eurent une influence décisive sur sa pensée, ce qui vaut tout particulièrement pour ce qui concerne la logique et la philosophie de la logique. Or ces trois auteurs comptent parmi les principaux représentants de l'universalisme […] à l'opposé de toute forme de pluralisme […]. » (Wagner, 2010 : 101)

Pour quelqu'un qui s'initia à la logique mathématique sous la tutelle de Frege à Iéna, durant ces quelques années qui précédèrent la première guerre mondiale, l'auteur de *SLL* nous offre un tableau qui, s'il laisse transparaître les influences de quelques grands maîtres[76], s'autorise d'une démarche propre, réfléchie et originale, à travers l'adoption du *point de vue syntaxique* et l'abandon de la conception universaliste pour un *principe de tolérance* foncièrement pluraliste. Ces deux « positions » forment le cœur de *SLL*, et la première apparaît désormais comme une étape *nécessaire* au développement de la deuxième[77]. Commençant avec un angle plus historique, cette section cherchera d'abord à dégager le faisceau d'influence qui fit passer Carnap d'un universalisme à saveur

[76] Pour un prélèvement des influences majeures, fait par Carnap lui-même, voir Carnap (1964 : p.xvi) et son « Intellectual Biography » (1963a) dans le volume de Schilpp (1963). Voir aussi « Replies and Systematic Expositions » (1963b) dans le même volume.

[77] L'histoire de la genèse de *SLL* à travers l'adoption de ces deux « positions », à deux moments différents, est remarquablement décrite en détail par Awodey et Carus (2007; 2009). Le traitement de la première partie de cette section en est largement redevable.

wittgensteinienne à un universalisme « métalogique » – c'est le point de vue syntaxique avant l'idée de tolérance – pour ensuite le diriger vers ce point de rupture, ce principe de tolérance qui ne le quittera plus jamais[78]. En plus de leur pertinence historique reliée à l'enjeu du révisionnisme à l'époque de l'universalisme, ces considérations sont essentielles à l'intelligence du principe de tolérance. Nous chercherons ensuite à exemplifier ce dernier à travers la méthode syntaxique puis à dégager l'instrumentalisme en lien avec le logocentrisme que Carnap hérite de Frege.

4.1 La Syntaxe logique du Langage : contexte d'élaboration et jeux d'influences

Nous commencerons par cela : le fond de la doctrine carnapienne en philosophie de la Logique et des mathématiques est tributaire de l'*antiempirisme* de Frege à l'égard des mathématiques (Ricketts 1994 : 182). La doctrine frégéenne postule l'existence d'une différence de nature entre mathématiques et sciences naturelles. Si les vérités des mathématiques sont *analytiques* – répétons-le, une vérité est analytique si et seulement si elle est *prouvable* à l'aide des seules lois de la Logique (et des définitions explicites), lesquelles n'ont pas besoin d'être prouvées et/ou justifiées –, les vérités des sciences naturelles, elles, sont *synthétiques a posteriori*, i.e. qu'elles ne peuvent pas être « prouvées » (évaluées) sans faire appel à l'observation, à des assertions à propos d'objets particuliers (des faits)[79]. C'est en cela que consiste l'antiempirisme et, il convient de le mentionner, l'antikantisme (partiel) de Frege : l'arithmétique (et la Logique…on le présuppose) est indépendante et de l'intuition spatiotemporelle (contre Kant) et de l'expérience (contre un empirisme à la Mill) car elle est construite à l'intérieur même des conditions les plus générales de la pensée, celles offertes par le *Begriffsschrift* (Friedman 1999 : 170).

Bien que Carnap ait finalement abandonné le projet logiciste dans sa formulation frégéenne, il n'a jamais cessé d'affirmer l'existence d'une distinction principielle entre la Logique et les mathématiques d'un côté et les sciences naturelles de l'autre. Dans le volume de Schilpp (1963), Carnap admet qu'il a d'ailleurs tenté d'offrir une explication

---

[78] C'est ce qu'admet Carnap dans son autobiographie intellectuelle (1963a : 18).

[79] Frege postule également une troisième catégorie de vérité : synthétique *a priori*. Les vérités de la géométrie en font partie.

pour la distinction entre les signes logiques et les signes descriptifs et celle entre les vérités logiques/analytiques d'un côté et les vérités factuelles/synthétiques de l'autre durant toute sa carrière[80].

Si la redéfinition frégéenne de la notion d'analyticité à partir de la nouvelle logique profite largement à Carnap, – et à tout le monde…–, la conception frégéo-russellienne des vérités et lois logiques en tant que principes maximalement généraux qui nous parlent du monde (physique) en tant que tel pose problème à son empirisme et à celui du *Weiner Kraus* en général. Ce problème, ce fut le Wittgenstein du *Tractatus philosophico-logicus* (1922) qui le solutionna. Il effectua, aux yeux de l'ensemble des membres du Cercle de Vienne, un *tournant linguistique* qui démina le terrain de l'empirisme[81]. Plus précisément, le tournant salvateur de Wittgenstein résolut le problème de la possibilité des mathématiques – et de la Logique puisque le projet logiciste ne faisait que transférer le problème plus bas… – dans un cadre empiriste; il résolut la fameuse question kantienne « comment peut-on rendre compte des mathématiques en tant qu'ils sont une forme de connaissance sur le monde qui ne provient ni de l'expérience ni de l'observation? ». Cette porte de sortie passe par une modification considérable de l'absolutisme à la Frege-Russell, qui fut résumée de la manière suivante par Hans Hahn :

> "If logic were to be conceived–as it has actually been conceived–as a theory of the most general properties of objects, as a theory of objects as such, then empiricism would in fact be confronted with an insuperable difficulty. But in reality logic does not say anything at all about objects; logic is not something to be found in the world; rather, logic first comes into being when–using a symbolism– people talk about the world..." (Hahn, 1980:40)

Le fait est que Wittgenstein rejette la conception de la Logique comme *science* maximalement générale qui s'occupe de nous fournir des vérités à partir d'un certain nombre de lois fondamentales et générales (les axiomes) qui s'appliquent à *tous* les *objets du monde*. Cela entraîne à son tour un rejet de la formulation des différentes logiques en termes de théories axiomatiques : il n'y a pas une proposition logique qui soit

[80] Carnap (1963b: 932).
[81] Voir Awodey et Carus (2005).

plus fondamentale et générale qu'une autre; les propositions de la logique sont toutes sur le même pied d'égalité et c'est pour cette raison que les axiomes apparaissent purement arbitraires (6.127- 6.1271) [82].

Au sein du *Tractatus*, la Logique n'est pas une *théorie*, mais une image qui reflète le monde (6.13) au sens où elle « figure » son échafaudage (6.124). Les vérités de la Logique sont des *tautologies* (ce sont les *propositions analytiques*), i.e. des propositions qui sont « vides de sens » (*sinnlos*) en ce qu'elles n'apportent aucune information sur le monde (4.461). Elles sont des *artefacts* de la fonction représentationnelle (isomorphique) du langage telle que dépeinte par la théorie picturale : toute proposition, pour qu'elle signifie, doit tenter de représenter le monde; elle doit figurer une situation possible et donc se faire image de la réalité (4.01). Les vérités logiques, elles, ne figurent aucune situation possible car elles permettent toute situation possible (4.462), ce qui est manifeste dans $p \vee \neg p$ par exemple[83]. Tout langage vérifonctionnel contenant certaines propositions douées de sens (celles des sciences naturelles…) et dans lequel on peut discerner des structures de type fonction/argument générera certaines propositions (les tautologies), qui, si elles ne sont pas *dépourvues de sens* (4.4611), sont vraies indépendamment des conditions de vérités d'autres propositions (4.46); elles ont un sens *vide de contenu* (*sinnlos*). La vérité (et la certitude) des tautologies est *sécurisée linguistiquement* (« linguistically secured »), i.e. à travers la simple utilisation d'un langage pour parler du monde (Ricketts 1994 : 185). On ne peut donc pas dire que la réalité obéit aux lois/vérités de la logique car ce sont nos pensées à propos de la réalité qui obéissent à celles-ci : voilà la révolution. S'il s'en éloigne considérablement, Wittgenstein conserve ici un élément essentiel de l'absolutisme à la Frege-Russell : tout système de représentation qui fait office de langage répondra de la théorie picturale et générera donc les mêmes *artefacts*, le même ensemble de tautologies – les différences de notation mises à part -, celles de la logique moderne. C'est là l'universalisme wittgensteinien. Il n'y a ici, encore une fois, qu'une seule logique, la logique classique.

[82] La numérotation des aphorismes provient de Wittgenstein (1993).
[83] En affirmant « il pleut ou il ne pleut pas », on ne contraint aucunement « l'espace des possibles ».

Ce cadre wittgensteinien d'une « conversion » des propositions analytiques de Frege en tautologies à travers la théorie picturale, Carnap l'endossa pleinement à partir de la moitié des années 1920 jusqu'à la fin des années 1930, tout en prenant soin de l'ajuster chaque fois à son projet logiciste, aux vues duquel la logique du *Tractatus* apparaît insuffisante, ce qui est manifeste à travers ces deux manuscrits que sont le « Investigations in General Axiomatics » (1928) et le « New Foundation of Logic » (1929)[84]. Nous avons là un Carnap qui tâche de modeler l'universalisme de Wittgenstein à ses propres besoins…et un de ceux-ci est sapé par la doctrine wittgensteinienne de l'ineffabilité de la forme logique des propositions (4.12), l'impossibilité constitutive (pour nous) d'émettre des propositions douées de sens à propos de la structure logique du langage, de la décrire à l'aide de ce même langage. Le problème va comme suit : si ce qui *s'exprime dans* le langage, soit le fait que la proposition et la réalité ont en commun cette forme logique , il nous est impossible de l'exprimer *par* le langage (4.121), alors, n'étant ni des images de faits ni des tautologies, quelle est la nature des propositions du *Tractatus* et, plus globalement, de toute proposition qui prétend nous parler de la structure du langage? Un Wittgenstein conséquent et particulièrement héroïque nous dira qu'elles ne sont rien d'autre que des *éclaircissements* dépourvus de sens (6.54). Cette solution est très loin de satisfaire le projet de reconstruction rationnelle d'un Carnap, on s'en doute, ne serait-ce que parce qu'il n'y a aucun intérêt (cognitif) à discuter de questions logiques à l'aide d'assertions d'énoncés déclaratifs qui n'ont à proprement parler aucune signification – et admettant qu'on y trouve un intérêt, comment le justifier[85] ? Que faire de ces éclaircissements philosophiques?

La réponse à ce problème, Carnap la trouva dans la vague des nouveaux travaux en logique mathématique, ceux de Hilbert, Gödel, Tarski et cie., qui faisaient usage d'une distinction essentiellement incompatible avec la théorie picturale : celle entre langage-objet et métalangage. C'est le point de vue *métalogique* qui, s'il ne récusait pas déjà la doctrine wittgensteinienne de l'ineffabilité de la structure logique du langage, s'avéra, aux yeux de Carnap, lui fournir un contre-exemple flagrant à travers la méthode

[84] Voir Awodey et Carus (2001).
[85] Ce point avait été soulevé par Gödel dans une discussion avec les membres du Cercle. Voir Stadler (1997 :288).

d'*arithmétisation* [86] - on *encode* les énoncés métamathématiques à propos d'un langage-objet *X* de sorte qu'on puisse les remplacer par des formules arithmétiques qui seront exprimables *dans X* - développée par Gödel pour démontrer son théorème d'incomplétude - Carnap et Gödel discutèrent de celui-ci aussitôt qu'en avril 1930. Dans cette perspective métalogique, les éclaircissements auxquels se livre le philosophe-logicien deviennent de légitimes propositions métalinguistiques (douées de sens) à propos d'un langage-objet quelconque. En janvier 1931, au lendemain de cette nuit d'insomnie qui lui permit d'entrevoir la théorie globale des formes linguistiques et son application à la philosophie[87], c'est un Carnap complètement libéré de la « prison wittgensteinienne » qui jette sur papier les germes de *SLL* (c'est le « Attempt at a Metalogic ») en adoptant pleinement les méthodes métamathématiques de base de la théorie des preuves hilbertienne (Awodey & Carus 2009 : 88-89). Un langage axiomatique est désormais, pour Carnap, un *calculus*, i.e. un système formel dont (1) les concepts (ebf, axiome, preuve, théorème etc.) sont décrits de manière purement syntaxique, sans rien assumer à propos de la nature et des potentielles interprétations/applications des symboles de l'alphabet[88], et (2) qui doit être complètement spécifié à l'aide de *règles explicites* formulées dans un métalangage. Ces deux composantes du point vue syntaxique carnapien forment, selon Awodey et Carus (2009 :100), deux pré-conditions *nécessaires* à l'idée de tolérance : sans le réquisit d'une spécification complète d'un langage en termes de règles explicites, les différentes alternatives qui doivent être tolérées ne sont pas pleinement définies, et sans la distinction entre un calculus et son interprétation (entre un langage et son contenu), nous n'avons même pas la possibilité de *distinguer* les différentes alternatives. On remarquera que ce lien entre le point de vue syntaxique et l'idée de tolérance a été mis de l'avant par Carnap lui-même dans la préface de *SLL*. Tout de suite après avoir affirmé notre liberté quant aux choix des formes de langages, il nous dit :

[86] Dans *SLL*, Carnap affirme justement qu'il voit en ces travaux une réfutation de la doctrine de l'ineffabilité. Voir §73.
[87] Voir Carnap (1963a : 53).
[88] Les langages I et II de *SLL* sont des langages *interprétés*, i.e. que l'utilisation présumée (ici l'axiomatisation de l'arithmétique ou de l'analyse) est inscrite dans leur formulation. Le point soulevé par Carnap est que l'étude des systèmes formels doit faire fi de toute utilisation préméditée.

> ”Up to now, in constructing a language, the procedure has usually been, first to assign a meaning to the fundamental mathematic-logical symbols, and then to consider what sentences and inferences are seen to be logically correct in accordance with this meaning. Since the assignment of the meaning is expressed in words, and is, in consequence, inexact, no conclusion arrived at in this way can very well be otherwise than inexact and ambiguous. *The connection* will only become clear when approached from the opposite direction: let any postulates and any rules of inference be chosen arbitrarily [...]” (Carnap, 1964: xv)[89]

Cette procédure dont il faut se détourner est celle de Frege et Wittgenstein…qui ne distinguaient pas entre la fonction *représentationnelle* et la fonction *combinatoire* du langage. La distinction faite et partant de la direction inverse, du point de vue syntaxique, il nous est alors possible, selon Carnap, de faire sens du fait qu'il puisse y avoir plusieurs langages alternatifs. Les tenants de deux langages alternatifs pourront alors (et devront…) clairement formuler la *syntaxe logique* de ceux-ci, i.e. exposer de manière systématique les règles formelles de leur langage respectif dans un langage-syntaxe (un métalangage). Mais au moment où Carnap adopte le point de vue syntaxique, il n'a pas encore adopté le principe de tolérance…

Pour faire une longue histoire courte[90]…le Carnap tout juste libéré du fardeau wittgensteinien à saveur de métaphysique kantienne reprend son projet logiciste au vu des résultats d'incomplétude de Gödel. Une conséquence notable du premier théorème est que la *prouvabilité* dans un système formel est un critère insuffisant pour rendre compte de la notion de vérité logico-mathématique. À cette époque, quelque part vers la fin de 1931, Carnap tente de remédier à cette situation en développant une notion *syntaxique* d'*analyticité* (de vérité logico-mathématique) qui soit plus forte que la simple prouvabilité formelle. Il croyait donc pouvoir arithmétiser, suivant la technique gödelienne, l'ensemble des notions du métalangage (ebf, analyticité etc.) dans le langage-objet (une axiomatisation conventionnelle de l'arithmétique), ce qui, il faut le noter, lui aurait permis d'affirmer que nous pouvons finalement tout faire avec *un seul langage*, le métalangage étant ici contenu (encodé) dans le langage-objet; une conclusion

[89] Je souligne.
[90] Pour une histoire détaillée des discussions entre Gödel et Carnap sur ce point, voir Awodey et Carus (2009 :93-96) et, partant d'un autre point de vue, Goldfarb (2009 : 117-120).

qu'il a justement endossé à l'époque de ce projet[91]. L'universalisme cogne une fois de plus à la porte, mais cette fois, dans le cadre du point de vue syntaxique carnapien…

Or cette tentative échoue sous le coup d'une objection que lui fait Gödel dans un échange de lettres, fin 1932, et qui correspond grossièrement à ce que l'on nomme, depuis Tarski (1936), le *théorème de l'indéfinissabilité de la vérité* : il est impossible de définir correctement la notion de vérité logico-mathématique *dans* tout langage-objet suffisamment puissant pour contenir l'arithmétique. En d'autre mots, la notion d' « analytique dans $\mathcal{L}$ » ne peut pas être arithmétisée dans $\mathcal{L}$, et le théorème a pour corollaire le fait que tout métalangage $\mathcal{L}'$ capable de définir la notion de vérité pour un langage-objet $\mathcal{L}$ doit avoir un plus grand pouvoir expressif – il doit être plus « fort »- que ce dernier. Donc, toute définition d' « analytique dans $\mathcal{L}$ » sera *relative* à la construction d'un métalangage $\mathcal{L}'$ qui contiendra des notions *non spécifiables* dans le langage-objet, une conséquence peu désirable pour Carnap le métamathématicien.

Deux choses : (1) la notion métalogique d'analyticité perd son caractère absolu, universel, pour être relativisée à l'adoption d'un métalangage $\mathcal{L}'$, ce qui rend le choix entre plusieurs métalangages différents tout au plus *conventionnel* au sens où rien ne nous permet d'affirmer qu'un choix en particulier nous offre la « bonne » notion d' « analytique dans $\mathcal{L}$ » (les choix guidant la construction de $\mathcal{L}'$ peuvent difficilement être dits contraints par une notion quelconque de « rectitude » vis-à-vis $\mathcal{L}$); (2) le métalangage $\mathcal{L}'$ devant être plus riche que $\mathcal{L}$, il est fort probable qu'on y utilise par exemple des notions telle que « for all properties *whatsoever*» - et non pas « for all properties which are definable in $\mathcal{L}$ » -, i.e. à l'aide de $(\forall X) \ldots X \ldots$, qui ne sont pas spécifiables dans $\mathcal{L}$ et qui menacent de nous engager, dans ce cas précis, à une forme de *platonisme*. Ainsi, en adoptant le principe de tolérance suivant lequel *il n'est pas de notre devoir d'instaurer des interdictions mais d'arriver à des conventions* (1964 : 51), suite aux échanges avec Gödel, Carnap évince ces deux tensions potentielles et, prenant en compte ces conséquences plus ou moins inévitables, ajuste convenablement le tir[92].

[91] «Well, there are sentences of very different form...but all of them, even the metalogical ones, are in a *single language*.” Voir Stadler (1997 : 329).

[92] L'hypothèse selon laquelle ce sont les discussions de Carnap avec Gödel qui ont motivées celui-ci à formuler le principe de tolérance est à la fois celle d'Awodey et Carus (2009 : 96) et celle de Goldfarb

Peu importe désormais que l'on utilise tel ou tel métalangage contenant ou non par exemple des notions « indéfinies » interdites par la métamathématique hilbertienne.

Bref, une fois de plus, l'Histoire a décidé du sort de l'universalisme, ici dans un cadre carnapien. Après avoir tenté d'accomplir son projet logiciste dans un cadre universaliste wittgensteinien, Carnap s'en évade en adoptant le point de vue métalogique qui lui fournit encore, l'instant de quelques mois, technique d'arithmétisation gödelienne à l'appui, l'espoir de tout réaliser avec l'aide d'un *seul langage*. Or cet idéal universaliste ne saurait constituer un projet réalisable, une conclusion qui apparaît telle quelle dans *SLL* :

> " …there exists neither a language in which all arithmetical terms can be defined nor one in which all arithmetical sentences are resoluble […] *everything mathematical can be formalized, but mathematics cannot be exhausted by one system*; it requires an infinite series of ever richer languages." (Carnap, 1964: §60(c))

Finissons par où nous avons commencé : la tentative d'explication de la distinction entre signes logiques et signes descriptifs que l'on retrouve dans *SLL* effectue un pas de côté remarquable en rejetant la conception frégéenne et wittgensteinienne *universaliste* de la vérité logique et de l'analytique pour la *relativiser* à l'adoption d'une forme de langage quelconque[93]. Il n'y plus qu'une seule notion d'*analyticité*, mais une pluralité : analytique-dans-$\mathcal{L}_1$, analytique-dans-$\mathcal{L}_2$…etc. Ce rejet d'un univers fixe et universel sur lequel quantifierait l'*unique* logique nous offre la possibilité d'envisager plusieurs logiques distinctes, chacune intriquée dans une forme de langage différente qui possède sa propre (*et unique*) relation de conséquence logique.

4.2 Principe de tolérance, logocentrisme et instrumentalisme

Il y a, selon Carnap, une confusion largement répandue au sein de l'entreprise philosophique entre les *questions-objets* (« object-questions ») et les *questions-logiques*

(2009 : 120). Ils diffèrent toutefois quant aux raisons qui l'auraient poussé à le formuler. Nous avons tenté ici d'intégrer leurs deux perspectives.

[93]Bien que la définition qu'offre Carnap des vérités analytiques soit originale en son genre, elle reste beaucoup plus proche de Wittgenstein que de Frege : "A sentence $\mathfrak{S}_1$ is called *analytic* (in I) when it is the consequence of the null class of sentences […] " et "In material interpretation, an analytic statement is absolutely true whatever the empirical facts may be. Hence, it does not state anything about facts." SLL, pp. 39-41.

(« logical-questions »), les premières référant à un domaine d'objets (leurs propriétés, relations etc.) en tant que tel, les secondes aux énoncés et aux termes (aux relations entre eux) qui eux, réfèrent aux objets du domaine en question (*SLL*; §72). La plupart des questions traditionnelles de la philosophie sont malencontreusement traitées comme des questions-objets alors qu'elles appartiennent à l'autre catégorie; les philosophes succombent à la confusion en croyant qu'ils parlent des objets en tant que tels alors que l'analyse logique montre qu'ils se débattent avec des formes de langages différentes. Pris au piège avec de *pseudo-problèmes*, ne parlant pas réellement de ce qu'ils croient être en train de parler, les participants d'un débat philosophique ne se rencontrent tout simplement pas (sur le même terrain); ils argumentent dans un faux-cadre qui ne produira rien d'autre qu'une série de disputes stériles.

Pour Carnap, les controverses entourant la question des fondements des mathématiques possèdent également cette particulière stérilité. Un des buts majeurs de *SLL* sera de dissoudre ce conflit entre les différentes écoles (logicistes, formalistes, et intuitionnistes) à travers l'utilisation d'une *méthode logique formelle* qui, par la définition rigoureuse et précise d'une série de concepts métalogiques (analytique, synthétique, contradictoire, valide, dérivable etc.), nous permet de construire adéquatement des énoncés portant sur un langage-objet. Cette méthode est la *syntaxe logique* d'un langage, soit la théorie *formelle* des formes linguistiques de ce langage (*SLL* : §1), i.e. l'exposition systématique, dans un métalangage, des règles de formation et de transformation de celui-ci.

Admettons que j'accepte de dire que pour affirmer l'existence d'un objet mathématique ayant telle ou telle propriété il me suffit de montrer qu'en supposant le contraire j'obtiens une contradiction et que vous rejetiez cette affirmation. L'utilisation de la méthode syntaxique nous permet de remarquer que ce n'est pas la vérité ou la fausseté de nos assertions respectives qui génère notre *apparent* désaccord – nous ne sommes pas en présence d'une question-objet -, mais le fait que nous utilisons deux formes de langages. On voit alors que le désaccord est *réel* car nos hypothèses de travail sont incompatibles : j'accepte $A \vee \neg A$, ce que vous refusez, et plus encore, les principes et les concepts que nous acceptons au sein du langage-syntaxe ne sont pas les mêmes : les vôtres respectent les exigences « constructivistes/intuitionnistes » et les miens, les exigences « classiques ». En spécifiant le tout à l'aide de règles de formation et de transformation, partant du point de vue syntaxique, il nous est possible, selon Carnap, de rendre compte du fait qu'il y a plusieurs langages alternatifs. Dans *SLL*, Carnap a tenté de rendre cela par l'articulation d'un langage répondant aux exigences « constructivistes », le *langage I*, et d'un autre, le *langage II*, répondant à des exigences plus « classiques ».

Que faire devant deux formes de langages distinctes? Dans *SLL*, l'utilisation de cette méthode syntaxique est instruite par le principe de tolérance; en fait, elle n'en est jamais véritablement dissociée. Dans sa « version augmentée », le principe nous dit:

> "*In logic there are no morals*. Everyone is at liberty to build up his own logic, i.e. his own form of language, as he wishes. All that is required of him is that, if he wishes to discuss it, he must state his methods clearly, and give syntactical rules instead of philosophical arguments." (*SLL* : 52)

En adoptant cette *attitude* – et non pas cette *thèse* -, les différents points de vues en fondements des mathématiques prennent la forme de *suggestions* concernant la construction d'une syntaxe logique pour un langage donné. Et dans l'éventualité où une de ces suggestions mènerait à l'élaboration d'un langage déviant vis-à-vis du langage classique des *Principia*, le langage exhibant supposément « la vraie logique », il n'y a pas de raisons de chercher à justifier cette déviation :

> "For language, in its mathematical form, can be constructed according to the preferences of any one of the points of view represented; so that no question of justification arises at all, but only the question of the syntactical consequences to which one or the other choices leads [...]" (SLL: xiv)

Deux logiciens tolérants chercheront plutôt à évaluer les *conséquences syntaxiques* qui viennent avec leurs choix respectifs. Mais à ce moment précis, on peut être tenté – une tentation typiquement philosophique – de se demander ce qui nous justifie à adopter cette attitude. Pourquoi le logicien ne devrait-il pas justifier la déviation de son système vis-à-vis de la forme classique? Le problème qui se pose semble être qu'on peut douter que Carnap nous ait effectivement donné des raisons convaincantes d'adopter le principe de tolérance[94]. Pourtant, la raison que nous offre Carnap est là de manière implicite : c'est le logocentrisme qu'il hérite de Frege.

Pour Carnap, aucune question de justification n'a droit de cité parce qu'on ne peut pas dire d'une forme de langage qu'elle est *correcte* et d'une autre, qu'elle est *incorrecte*. Mais pourquoi cela? En nous demandant de délaisser les arguments philosophiques pour les règles explicites de la méthode syntaxique, on voit très clairement que la Logique joue ici un rôle fondamental; qu'elle administre la conduite de toute enquête qui prétend être d'ordre rationnel. Plus précisément, Carnap croit, tout comme Frege, que toute enquête d'ordre rationnel doit utiliser et donc présupposer la Logique. Le réquisit carnapien d'une spécification des différentes hypothèses à l'aide de la méthode syntaxique prend tout son sens car ce n'est qu'à partir du moment où le langage parlé est pleinement défini par un langage-syntaxe que se trouve fixé une relation de conséquence logique, et, suivant ici Frege, ce n'est que dans le contexte d'une telle relation qu'on peut dire d'une proposition qu'elle appuie la vérité d'une autre :

> "If we step away from logic, we may say: we are compelled to make judgements by our own nature and by external circumstances […] I shall merely remark that what we have here is not a logical consequence. What is given is not a reason for something's being true, but for our taking it to be true." (Frege, 1967: 15)

Mais contrairement à Frege, Carnap, à l'aide de sa distinction entre la fonction représentationnelle et la fonction combinatoire du langage, partant du point de vue syntaxique, constate qu'il y a plusieurs formes de langages alternatives, différents cadres d'enquêtes à l'intérieur desquels il nous est possible de fixer une relation de conséquence logique. C'est le pluralisme des formes de langages carnapien, qui s'éloigne de l'universalisme frégéen.

Malgré cette différence majeure, Carnap conserve le logocentrisme de Frege : dans la mesure où toute enquête d'ordre rationnel doit utiliser la Logique et donc présupposer qu'une relation de conséquence logique soit en place, il nous est impossible de faire appel à quelque chose qui serait à l'*extérieur* d'un langage et qui puisse nous permettre d'affirmer que la relation de conséquence logique fixée par *ce* langage est

[94] Cette objection est soulevée par Köllner (2009).

correcte (Ricketts 1994 : 182). En adoptant une logique non-classique, le logicien adopte une forme de langage particulière ayant sa propre relation de conséquence logique, et n'a donc pas besoin (il ne le peut pas…) de justifier son choix au près du logicien classique car cette question présuppose une notion de « correction » qui soit transcendante par rapport aux différentes formes de langage. Or les deux logiciens ne parlent pas le même langage… Le choix est libre parce qu'il n'y a aucune notion de justification ou de « correction » *antécédente* à l'*adoption* d'un langage. Dans ce cadre, pourquoi ne pas adopter une attitude de tolérance? C'est là une raison qui pourrait nous être offerte par Carnap en faveur de l'adoption de son principe.

Nous sommes maintenant mieux positionnés pour dégager l'instrumentalisme de Carnap. Admettons une logique classique $\mathcal{L}_1$ et une logique de la pertinence $\mathcal{L}_2$. La justification d'un énoncé quelconque étant nécessairement une *question interne* à laquelle on répond par l'utilisation des règles d'inférence d'une forme de langage particulière, le choix entre $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ *n'est pas* une question *d'ordre théorique*. Suivant la distinction de Carnap[95], ce choix représente plutôt une *question externe*, i.e. une question d'ordre *non-cognitif* dont les réponses qui peuvent lui être données ne sauraient être dites « correctes » ou « incorrectes » car les raisons offertes ne seront pas gérées par une relation de conséquence logique. Le choix entre $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ est une question *d'ordre pragmatique*, un problème purement pratique qui se pose aux logiciens à peu près dans les termes suivants : étant donné certains buts fixés, lequel de ces systèmes est le plus efficace, fertile, économique…etc. C'est là la définition de l'*instrumentalisme*. Pour revenir à notre exemple, étant donné le fait que la relation de conséquence logique de $\mathcal{L}_1$ contient $A \vee \neg A \vdash B$ et que celle de $\mathcal{L}_2$ ne le contient pas, le logicien dont le but est de formaliser les théories inconsistantes non-triviales trouvera $\mathcal{L}_2$ beaucoup plus efficace et pertinente que $\mathcal{L}_1$… Ces remarques établissent clairement l'instrumentalisme carnapien, une position qui est à un mot près, « correct », identique à un pluralisme dépendant dans un contexte d'application locale.

[95] Cette importante distinction carnapienne apparaît dans Carnap (1950).

Chapitre 5

Pluralisme et relation de conséquence logique : vérité, preuve et règle de jeu

Établissons rapidement une distinction fondamentale : celle entre dénotation et sens. Prenez $14 \times 18 = 252$. Le fait qu'en multipliant 14 avec 18 nous obtenions 252 peut nous apparaître d'emblée comme l'expression d'une égalité au sens où les deux côtés de = *dénotent* le même entier naturel – où est-il? – là où × exprime une *fonction*. Ce qui serait alors laissé dans l'ombre consiste en le fait que nous exécutons un *processus de calcul* pour montrer que les dénotations sont égales, et qu'il est donc erroné de dire simplement que 14×18 *égale* 252 car si nous avions là deux objets identiques, $A = A$, nous n'aurions jamais ressenti le besoin d'affirmer leur égalité. Il y a de l'information en jeu, du type $A = B$. C'est un point bien connu des philosophes depuis Frege : 14×18 et 252 n'ont pas le même sens bien qu'ils aient la même dénotation. Concrètement, nous posons une *question*, 14×18, et nous obtenons une *réponse*, 252, suite à l'exécution d'un calcul. On peut concevoir une même formule *A* comme une série d'*instructions* qui détermine son *sens* et/ou comme le *résultat idéal* trouvé suite à ces opérations, i.e. sa *dénotation*. Suivant Girard (1989 :3), on introduira les associations suivantes :

- Sens, syntaxe, preuves.
- Dénotation, vérité, sémantique, opérations algébriques.

La *tradition algébrique* partant de Boole et Schröder en passant par Löwenheim (et, à une certaine époque, Tarski) ignore (partiellement…) le sens pour se concentrer uniquement sur la *dénotation* des formules de la Logique, soit la valeur de l'ensemble $V = \{0,1\}$ qu'elles prendront, et sur les relations algébriques qu'elles entretiennent les unes avec les autres. De manière générale, dans un cadre où l'on s'intéresse aux dénotations en tant que telles, l'analyse de la signification des constantes logiques et du comportement de la relation de conséquence logique est faite en interprétant les structures logiques dans des structures algébriques (ou catégoriques, depuis le milieu des années 1960). Cette approche algébrique reste pratiquement intacte dans la *théorie des modèles* (post) tarskienne : on interprète les termes singuliers, les prédicats, les variables etc. en termes de fonctions sur ces structures, ces modèles tarskiens, pour s'intéresser aux dénotations des formules (le Vrai ou le Faux) posant de ce fait même la préservation de la vérité entre structures (modèles) au cœur de la notion de conséquence logique. L'avantage avec tout cela c'est que ça *fonctionne* très bien, en témoignent les sémantiques dénotationnelles en informatique théorique, bien qu'un modèle à la Tarski ne soit aucunement *palpable*, contrairement à une preuve. Cette approche *sémantique* de la notion de conséquence logique est désignée par l'appellation « *modèle-théorétique* ». Elle est fondée plus directement dans les travaux de Tarski.

L'analyse de ce dernier reste pourtant très proche de la langue naturelle : la conjonction « ∧ » est traduite par « et », et la relation de conséquence logique cherche à formaliser le plus adéquatement possible une notion *informelle* qui prendrait racine dans la langue naturelle, admettant qu'il y ait une telle chose. Il y a de cela déjà quelques années, Beall et Restall proposaient une forme de pluralisme logique ancrée dans cette approche : il existe plusieurs relations de conséquence logique *correctes* dans un cadre modèle-théorétique, soit, pour ne prendre que celles-là, une relation *classique, intuitionniste* et *pertinentiste*. Nous exposerons ce pluralisme de manière explicite dans la première section de ce chapitre.

Pourtant, cette approche n'est pas la seule, ce qu'admettent volontiers Beall et Restall. Une chose est certaine : le sens (la syntaxe, les preuves) contient la dénotation au moins de manière implicite. Rien ne se fait sans le formalisme; sans les symboles, la syntaxe du système. Avec ses *Grundlagen der Geometrie* (1889), Hilbert sème les graines d'une autre approche, preuve-théorétique celle-là, qui rend (partiellement…) son autonomie à la syntaxe, proposant d'étudier les preuves pour elles-mêmes, sans rien assumer à propos de la nature et des potentielles interprétations/applications des symboles de l'alphabet – c'est l'adage du *formalisme* à la Hilbert. C'est la *tradition syntaxique* d'une *théorie des preuves*, une tradition qui effectua un changement de « paradigme » vers la fin des années 1970; un saut du « pourquoi » au « comment » pour reprendre l'expression de Girard (1997), qui se traduit par un passage des systèmes à la Hilbert aux systèmes à la Gentzen (calcul des séquents, déduction naturelle). Dans un cadre gentzenien, où l'on s'intéresse à la notion de preuve plutôt qu'à la notion de vérité, l'analyse du concept de conséquence logique s'appuie sur la notion de *dérivation* (preuve, déduction), qui s'appuie elle-même sur l'idée que chaque étape du mouvement déductif doit être *autorisée* par l'application d'une règle d'inférence (ou par l'introduction d'une hypothèse…). Il y a de cela déjà une quinzaine d'années, on vit apparaître sous l'étiquette « logiques sous-structurelles » une étude des logiques non-classiques telles que formulées au sein du calcul des séquents. La logique classique y apparait comme la logique pleinement structurelle (elle admet toutes les règles structurelles), et on obtient les logiques non-classiques en restreignant différemment la classe des règles structurelles admises, ces restrictions entrainant à leur tour une modification (une réduction…donc un « affaiblissement ») de la classe des théorèmes/inférences valides générée par une logique. Ce cadre est particulièrement fertile pour l'établissement d'un pluralisme logique : les logiques non-classiques y spécifient *chacune à leur manière* une relation de conséquence logique de type preuve-théorétique, dans un cadre fixe, celui du méta-calculi des séquents, non pas en modifiant directement les règles logiques mais en jouant avec les règles qui gouvernent la *structure* des preuves, modifiant donc ce qu'il sera possible de prouver à l'aide des premières. La deuxième section exposera les grandes lignes d'un pluralisme dans cette perspective.

Il reste enfin une troisième approche, l'approche dialogique, qui remonte à la *Dialogische Logik* développée vers la fin des années 1950 suivant une intuition de Paul Lorenzen, étendue par son élève Kuno Lorenz à l'intérieur de la *théorie des jeux* : la signification des constantes logiques est déterminée par les règles d'un jeu à somme nulle de type non-collaboratif, les deux seuls joueurs connaissant préalablement tous les mouvements possibles de leurs adversaires (« perfect information »), et où la validité est définie comme l'existence d'une stratégie gagnante pour le défenseur (Marion, 2009). La notion de conséquence est ici une question de relation entre les règles d'un jeu. Celle-ci est sœur de la *sémantique des jeux* (« game-theoretic semantics »), qui fut développée vers la fin des années 1960 par Hintikka dans un cadre un modèle-théorétique. Mais là où la sémantique des jeux fait usage du concept de vérité dans un modèle, l'approche dialogique de Lorenzen et Lorenz cherche à offrir un traitement ludique de la validité inspirée du cadre preuve-théorétique. Ce cadre, très fertile pour la Logique, d'un jeu entre opposants et défenseurs, d'une *Dialogische Logik*, est en pleine expansion présentement, s'éloignant toutefois des intentions monistes d'un Lorenzen : si ce dernier cherchait à délimiter les fondations *intuitionnistes* des mathématiques et de la Logique, le terme « dialogique » renvoie désormais à un cadre conceptuel *d'ordre général* nous permettant d'y formuler plusieurs logiques, se rapprochant par ce fait même du calcul des séquents. Récemment, les travaux de Rückert (2001), Rahman & Keiff (2005) et cie ont clairement établis la possibilité d'un pluralisme logique dans le cadre d'une approche dialogique du concept de conséquence logique. La troisième et dernière section exposera les avancées de cette *tradition ludique*.

5.1 L'approche modèle-théorétique

Dans deux articles publiés à une année d'intervalle l'un de l'autre, Beall et Restall (2000; 2001) ont développé une forme de *pluralisme logique* suivant laquelle il existe plus d'une relation de *conséquence logique correcte*, cette pluralité surgissant entre des formules *A,B,C…* qui portent sur un *même* langage, et par application de ces différentes relations de conséquence logique à une langue naturelle, entre le type d' « énoncés »[96] qui sont exprimées dans cette langue. Dans l'exposition systématique de leur pluralisme, qui se trouve dans un petit livre, *Logical Pluralism*, Beall et Restall (2006 : 35) résument leur position à l'aide des conditions suivantes :

A. Le noyau fondamental de la notion de *conséquence* est offert par GTT.

[96] Beall et Restall utilisent le terme « claim » pour bien souligner leur neutralité quant aux entités qui peuvent jouer le rôle de composants au sein des arguments en langue naturelle. Peu importe donc que ces choses qui composent les arguments soient comprises comme des énoncés (« sentences »), des énoncés enrégimentés (« regimented sentences »), des jugements ou des propositions (contenus).

B. Une instance de GTT est obtenue par une *spécification des* cas_x dans GTT, et une spécification de la relation « est vrai dans un cas ». Une telle spécification peut être vue comme une manière d'offrir des *conditions de vérités*.
C. Une instance de GTT est *correcte* si elle satisfait le rôle fondamental de la notion de conséquence, et si ses jugements à propos de celle-ci sont *nécessaires, normatifs et formels*.
D. Une *logique* correspond à une instance correcte de GTT.
E. Il existe *au moins deux* instances (distinctes) correctes de GTT.

Une logique est donc construite en offrant une explication des cas_x sur lesquels GTT quantifie :

> (GTT) Un argument est $valide_x$ si et seulement si, dans tous les cas_x où les prémisses sont vraies, la conclusion l'est également.

Beall et Restall s'attardent à dégager des différentes contraintes imposées par différentes logiques sur la relation de conséquence une spécification particulière des cas_x, donc une instance de GTT. L'importance de ces contraintes concerne ici les relations entre les formules, les *énoncés* d'une instance, et les cas_x, ce qui revient à offrir une sémantique aux connecteurs logique à travers le « est vrai dans un cas_x ».

Pour l'élaboration de la notion de conséquence logique, les auteurs ont choisis le cadre *modèle-théorétique,* où la validité de $\Gamma \Rightarrow A$ est une question de *préservation de la vérité* lors du mouvement déductif allant de Γ à *A*. Leur point de départ est la thèse de Tarski, que l'on identifiera par TT :

> (TT) L'énoncé *A* est une *conséquence sémantique* des énoncés de la classe Γ, on note $\Gamma \vDash A$, si et seulement si tout modèle de la classe Γ est aussi un modèle de l'énoncé *A*, i.e. ssi, pour tout *I*, si *I* est telle que, pour tout A ∈ Γ, $f_I(A) = V$, alors $f_I = V$[97].

[97] Voir Tarski (2009 : 93; 1956 : 417) pour la définition originale.

La deuxième clause (après le « i.e. ») est redondante, mais l'utilisation des fonctions de vérité rend explicite l'idée d'une préservation de la vérité à travers les modèles : nous avons $\Gamma \vDash A$ ssi toute interprétation (I) qui rend vraie tous les membres de Γ rend également vraie A[98]. Aux côtés des *mondes possibles* de Leibniz et des *termes variables* de Bolzano, la préservation de la vérité entre *modèles* constitue pour Beall et Restall une *exemplification* d'une notion se trouvant au cœur du noyau fondamental du concept de conséquence logique (dans une approche sémantique): la notion d'un *cas* («case »). Cela les mène à *généraliser* TT à travers la formulation d'un concept *préthéorique* de conséquence logique, qu'ils nomment GTT pour « Generalised Tarski Thesis ». La validité est donc ici une question de préservation de la vérité dans *tous les cas*; un argument est valide s'il est *impossible* que les prémisses soient vraies et en même temps la conclusion fausse.

Dans « Du concept de conséquence logique » (1936), Tarski cherche à *fonder* la Logique à travers son approche sémantique au concept de conséquence logique[99]. Bien qu'il affirme d'entrée de jeu que toute définition rigoureuse de ce concept impliquera un certain degré d'arbitraire (2009 : 84), il cherche à rendre compte de certaines intuitions :

> « Du point de vue des intuitions courantes, il est clair qu'il ne peut jamais arriver que la classe *K* se compose uniquement d'énoncés vrais et que l'énoncé *X* soit faux. […] une relation déterminée uniquement par la forme des énoncés sur lesquels elle porte […] La relation de conséquence ne peut être affectée par le remplacement des objets auxquels réfèrent ces énoncés par d'autres objets. » (Tarski, 2009 : 90)

[98] L'idée d'une attribution de valeurs de vérité aux énoncés atomiques, ceux-ci déterminant, par une combinatoire caractéristique, la valeur de vérité des énoncés complexes d'un langage formel remonte, dans l'histoire de la logique moderne, à Frege, Peirce et Boole puis à Post et Wittgenstein à travers l'utilisation *explicite* des tables de vérité. On peut voir en ces développements les germes de l'approche modèle-théorétique - dans son *Mathematical Logic*, Kleene (2002) parle déjà de théorie des modèles pour l'approche fondée sur les tables de vérité.

[99] Tarski critiqua l'analyse syntaxique du concept de conséquence logique à l'aide de l'ω-incomplétude alors que l'analyse sémantique courante pour la logique du premier ordre est extensionnelment équivalente à l'analyse syntaxique via le théorème de complétude forte. C'est un point soulevé par Bonnay et Cozic (2009 : 80). Tarski visait donc à remédier aux défauts de l'analyse syntaxique, les logiques d'ordre supérieur en tête, en *fondant* le concept de conséquence sur son approche sémantique. Quelque chose du projet tarskien a été conservé : à travers les théorèmes de complétude et de fiabilité, l'approche sémantique courante apparaît plus souvent qu'autrement comme une justification de l'approche syntaxique : la syntaxe est subordonnée à la sémantique. Or il convient de noter que le calcul des séquents de Gentzen nous offre une justification purement syntaxique des règles logiques : la complétude y apparaît comme une propriété interne, exprimée par l'élimination des coupures. Voir Girard (2003).

Ces considérations fournissent, selon Tarski, deux critères d'adéquation pour toute relation de conséquence :

1) (Nécessité) : Si A est une conséquence de Γ, alors elle doit être nécessaire au sens où la vérité est *nécessairement préservée* (dans tous les cas possibles) lors du mouvement déductif allant des prémisses à la conclusion[100].
2) (Formalité) : Si A est une conséquence de Γ, alors c'est en vertu de la *forme logique* des énoncés, indifféremment d'une variation de la référence des termes qui dénotent[101].

Beall et Restall endossent ces deux critères et, reprenant MacFarlane (2000 : ii), ils ajoutent ces deux caractérisations supplémentaires de la formalité : (1) la Logique est formelle au sens où elle fournit des normes pour la pensée en tant que telle et (2) au sens où elle fait abstraction du contenu sémantique de la pensée[102]. Enfin, ils ajoutent ce troisième critère :

3) (Normativité) : Endosser les prémisses d'un argument valide et rejeter la conclusion revient à se contredire au sens où il n'y a aucun cas dans lequel ces assertions pourraient être vraies.

Nous revenons à la condition C : pour qu'une relation de conséquence logique qui satisfait GTT soit *correcte*, elle doit être nécessaire, normative et formelle (en un sens où l'autre du terme). Pour le reste de l'exposition, nous laissons de côté les discussions de Beall et Restall sur la rectitude des différentes logiques vis-à-vis de ces critères – elles les remplissent – pour nous concentrer sur trois logiques différentes qui spécifient chacune à leur manière les cas_x dans GTT : la logique classique, la logique de la pertinence et la logique intuitionniste. Chacune des relations de conséquence de ces logiques *théorise* la notion préthéorique exprimée par GTT, et il ne fait donc aucun sens de se demander

[100] L'interprétation de ce critère a soulevée une certaine controverse. Nous offrons les grandes lignes de l'interprétation modale endossée par Etchemendy (1990). Voir Ray (1996) pour une interprétation différente.

[101] C'est l'idée tarskienne d'une *invariance sous permutations* (Mc Gee, 1996).

[102] MacFarlane conclut sa thèse en remarquant que la tradition n'a pas de caractérisation communément admise. C'est une forme de pluralisme concernant les différentes notions de formalité qu'endossent également Beall et Restall.

laquelle de ces relations est *la bonne* explication du concept. C'est là le pluralisme de Beall et Restall.

5.1.1 Logique classique : les modèles tarskiens[103]

Un *modèle tarskien* $\mathfrak{M}$ pour un langage *K* du premier ordre est une paire ordonnée $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$, où $\mathcal{D}$ est un ensemble non-vide, le *domaine* de discours, et *I* une *fonction d'interprétation* telle que :

(i) Si *b* est une constante, alors *I(b)* est un membre de $\mathcal{D}$.

(ii) Si P^n est un prédicat n-aire, alors *I(P)* est un sous-ensemble de $\mathcal{D}^n$.[104]

Laissons α être une fonction qui assigne des dénotations (des éléments de $\mathcal{D}$) aux variables libres, i.e. une *assignation* sur un modèle $\mathfrak{M}$: si *A* est une formule de *K*, $\mathfrak{M}$ une interprétation de *K* et α une *assignation* sur $\mathfrak{M}$, alors $\mathfrak{M}, \alpha \vDash$ A pour « $\mathfrak{M}$ *satisfait A* sous l'assignation α » ou « *A* est vraie dans $\mathfrak{M}$ via α ». La dénotation d'un terme *t* de *K* dans $\mathfrak{M}$ sous α est la suivante : si *b* est une constante, alors $\mathcal{D}_{\mathfrak{M},\alpha} = I(b)$, et si *x* est une variable, alors $\mathcal{D}_{\mathfrak{M},\alpha}(x) = \alpha(x)$.

Les clauses suivantes nous permettent de définir la *vérité dans un modèle* :

- Si P^n est un prédicat n-aire de *K* et que $t_1, \dots, t_n$ sont des termes, alors $\mathfrak{M}, \alpha \vDash St_1, \dots, t_n$ si et seulement si le n-tuple $\langle \mathcal{D}_{\mathfrak{M},\alpha}(t_1), \dots, \mathcal{D}_{\mathfrak{M},\alpha}(t_n) \rangle \in I(P)$.
- $\mathfrak{M}, \alpha \vDash \neg A$ si et seulement si ce n'est pas le cas que $\mathfrak{M}, \alpha \vDash A$.
- $\mathfrak{M}, \alpha \vDash$ A ∧ B si et seulement si $\mathfrak{M}, \alpha \vDash A$ et $\mathfrak{M}, \alpha \vDash$ B.
- $\mathfrak{M}, \alpha \vDash$ A ∨ B si et seulement si soit $\mathfrak{M}, \alpha \vDash$ A ou $\mathfrak{M}, \alpha \vDash$ B.
- $\mathfrak{M}, \alpha \vDash$ A → B si et seulement si soit ce n'est pas le cas que $\mathfrak{M}, \alpha \vDash$ A ou c'est le cas que $\mathfrak{M}, \alpha \vDash$ B.
- $\mathfrak{M}, \alpha \vDash \forall x A$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \alpha' \vDash$ A pour tout variante *x* α'de α.
- $\mathfrak{M}, \alpha \vDash \exists x A$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \alpha' \vDash$ A pour au moins un variante *x* α'de α.

[103] On comprendra que la présentation qui suit est l'analyse sémantique courante par la théorie des modèles et non pas celle de Tarski. L'adjectif « tarskien » doit être compris comme un clin d'œil historique.
[104] $\mathcal{D}^n$ est l'ensemble de tous les n-tuples formés à partir des membres de $\mathcal{D}$.

Les modèles tarskiens nous offrent une spécification des cas_x dans GTT ($cas_{\mathfrak{M}}$) et donc une spécification de « vrai dans un $cas_{\mathfrak{M}}$ » à travers les clauses récursives définissant les conditions de vérité pour les énoncés atomiques et les énoncés complexes. GTT devient alors :

> ($GTT_{\mathfrak{M}}$) : Un argument est valide si et seulement si, dans tout modèle où les prémisses sont vraies, la conclusion l'est également.

GTT génère une relation de conséquence classique lorsque les cas_x sont spécifiés par des modèles tarskiens.

5.1.2 Logique de la pertinence : les situations pertinentistes

Pour analyser la spécification des cas_x que nous offre la logique de la pertinence, prenons d'abord une autre instance (correcte) *classique* qui spécifie les cas_x de GTT à travers la notion de *mondes possibles*, les cas_w, où $w \vDash A$ veut dire « A est vraie dans le monde *w* ». Cette spécification de GTT nous offre l'instance suivante :

> (GTT_w) : Un argument est valide si et seulement si, dans tous les mondes où les prémisses sont vraies, la conclusion l'est également.

Admettons maintenant $A \wedge \neg A \vDash B$. La relation de conséquence classique défini par (GTT_w) nous dit que *n'importe quel B suit* de *n'importe quel* $A \wedge \neg A$ dans tous les mondes possibles. La relation de conséquence d'une logique de la pertinence, quant à elle, demande plus qu'une simple préservation de la vérité à travers les mondes possibles : ce *n'est pas* n'importe quelle formule *arbitraire B* qui *est une conséquence* de n'importe quelle formule *arbitraire* $A \wedge \neg A$. La même remarque s'applique à $B \vDash A \vee \neg A$. La contrainte pertinentiste consiste à demander que la préservation de la vérité à travers les cas_x aille au-delà de deux contraintes qui s'appliquent aux mondes classiques : la *complétude* et la *consistance*. De manière générale, cela consiste à dire qu'une formule doit être *pertinente* dans le cadre d'une *déduction* quelconque, celle-ci étant effectuée dans une *situation* particulière.

Pour capturer les contraintes d'une relation de conséquence pertinentiste, Beall et Restall spécifient les cas_x de GTT avec la notion de *situation*, les cas_s, suivant les lignes de Barwise et Perry (1983). Pour bien exemplifier le comportement de la négation dans une situation vs un monde possible, prenons l'exemple suivant offert par les auteurs:

- Dans la situation s_1 qui implique la demeure de Pierre, il est vrai dans s_1 que Christine dort et que la radio est ouverte; mais il est faux dans s_1 que la télévision est allumée et, la télévision étant ici un « objet » de la situation, il s'ensuit qu'il est vrai dans s_1 que la télévision n'est pas allumée. Est-il vrai dans s_1 que Jacques est en train de nourrir le chat? Non. Est-il faux dans s_1 que Jacques est en train de nourrir le chat ? Non. Jacques n'est pas un objet de la situation.

Les situations sont des *parties* du monde et les énoncés sont vrais d'une situation particulière. Certes, les mondes possibles sont un type spécial de situations : ils sont des situations complètes et consistantes. Mais, comme le montre l'exemple ci-haut, les *situations pertinentistes* sont, quant à elles, possiblement incomplètes et inconsistantes : (1) étant donné qu'elles sont des parties *restreintes* du monde, les situations peuvent échouer à décider la valeur de vérité d'une formule A, (2) et elles peuvent très bien valider $A \wedge \neg A$ sans permettre la déduction de n'importe quelle formule B.

Ces deux contraintes, la complétude et la consistance, sont intimement reliées au comportement de la négation en logique classique, sa clause de vérité dans un cas_w étant :

- $w \vDash \neg A$ si et seulement si $w \nvDash A$.

Dans tous les mondes possibles, la négation de A devra être vraie si A n'est pas vraie; et une formule arbitraire B sera vraie si la négation de A et A sont vraies en même temps. C'est donc que la négation se comporte différemment aux mondes possibles qu'elle ne se comporte aux situations restreintes : dans une situation où la négation de A est vraie il n'est pas obligatoire que A ne soit pas vraie; et dans une situation où la négation de A et A sont vraies, il se peut qu'il ne soit pas pertinent de déduire n'importe quelle formule B. La tâche consiste donc à spécifier le comportement de la négation, sa clause de vérité dans ces cas_s qui forment la relation de conséquence d'une logique de la pertinence; les autres connecteurs se comportant essentiellement de la même manière que les connecteurs classiques : $s \vDash$ A ∧ B si et seulement si $s \vDash A$ et $s \vDash$ B, $s \vDash$ A ∨ B si et seulement si soit $s \vDash$ A ou $s \vDash$ B…

Beall et Restall favorise l'analyse sémantique de Dunn (1994;1996) par le biais de la notion de *compatibilité*. Selon cette approche, la négation se comporte dans les situations comme la nécessité (et la possibilité) dans les mondes possibles. L'idée consiste alors à introduire des *modèles de situations non-actuelles* qui sont reliées entre elles par une relation binaire $\mathcal{C}$ de *compatibilité*. La clause de vérité de la négation dans un cas_s est la suivante :

- $s \vDash \neg A$ si et seulement si $s' \nvDash A$ pour tout *s'* tel que $s\mathcal{C}s'$.

La négation de A est donc vraie dans *s* si et seulement si toute situation dans laquelle *A* est vraie est incompatible avec *s*. Plus encore, si la négation de *A* est vraie dans *s* et *A* est vraie dans *s'*, alors *s* n'est pas compatible avec *s'*; inversement, si *A* n'est pas vraie dans toute situation *s'* compatible avec *s*, alors la négation de *A* est vraie dans *s*. Les situations pertinentistes nous offrent une spécification des cas_x dans GTT (cas_s) et donc une spécification de « vrai dans un cas_s ». GTT devient alors :

> (GTT_s) : Un argument est valide si et seulement si, dans toutes les situations où les prémisses sont vraies, la conclusion l'est également.

Lorsque les cas_x de GTT sont spécifiés par des situations, nous obtenons une relation de conséquence pertinentiste : une inférence de $A \wedge \neg A$ à B pourra être invalide dans la mesure où une situation *s* pourra rendre vraie les prémisses sans rendre vraie la conclusion.

5.1.3 Logique intuitionniste : les étapes constructivistes

On peut faire remonter la genèse du constructivisme au temps de Brouwer et son intuitionnisme en fondements des mathématiques. Pour les membres de l'école de Brouwer, une preuve mathématique est correcte dans la mesure où elle encode les *constructions* de l'activité inférentielle du mathématicien. Leur rejet de $\neg\neg A \rightarrow A$ et de la validité universelle de $A \vee \neg A$ s'ensuit car avec ces deux principes, il nous suffit de montrer $\neg\forall x \neg A(x)$ pour prouver $\exists x A(x)$. Nous n'avons donc aucunement besoin d'exhiber la construction d'un objet a qui satisfait $\exists x A(x)$. Or c'est justement l'idée derrière le réquisit constructiviste : admettant que nous ayons prouvé $\exists x A(x)$, nous devons être en mesure de *construire* un objet qui ait cette propriété; un point qui est assuré par l'isomorphisme de Curry-Howard. De manière générale, le logicien intuitionniste cherche à dire qu'une inférence est valide ssi il existe une construction des prémisses qui nous offre également (qui peut être transformé en) une construction de la conclusion. On notera que c'est également le sens de $A \to B$ suivant l'interprétation constructive de Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK), ce qui n'a rien de surprenant étant donné le théorème de la déduction.

S'inspirant de la sémantique de Kripke, Beall et Restall cherchent à rendre compte de cette image des constructions par la notion d'une étape (« a stage »), celle-ci pouvant être comprise comme une étape dans le processus de construction d'une preuve. La logique intuitionniste nous offre une spécification des cas_x de GTT à travers ces étapes constructivistes, les cas_e, qui satisfont les conditions suivantes :

- Les étapes sont potentiellement *incomplètes*. Une étape peut échouer à décider la valeur de vérité d'une formule A car il se peut très bien que nous n'ayons pas toute l'information nécessaire pour cela à chaque étape du processus de construction. C'est là un rejet de *l'omniscience classique* qui va de pair avec un rejet de la validité universelle de $A \vee \neg A$. La loi du tiers exclu est valide d'un point de vue intuitionniste si *toutes* les étapes l'autorisent, et il est possible qu'une étape ne l'autorise pas. Conséquemment, nous avons $\neg\neg A \nvDash A$.
- Les étapes sont potentiellement *extensibles*, i.e. qu'une étape *e* peut être étendue par une autre étape *e'*, ce que nous notons $e \sqsubseteq e'$. Plus encore, l'information que l'on acquiert aux différentes étapes est *cumulative* à travers la relation d'inclusion : si $e \sqsubseteq e'$ et $e \vDash A$, alors $e' \vDash A$.
- Les étapes sont des *ensembles partiellement ordonnés*, i.e. que la relation d'inclusion $\sqsubseteq$ est réflexive, transitive et antisymétrique : pour tout *e*, $e \sqsubseteq e$; si $e \sqsubseteq e'$ et $e' \sqsubseteq e''$ alors $e \sqsubseteq e''$; si $e \sqsubseteq e'$ et $e' \sqsubseteq e$ alors $e = e'$.

- Dans la mesure où les étapes ne sont pas omniscientes, elles nous permettent de construire certains objets mais non pas tous les objets de notre choix. Il nous faut donc clarifier les conditions sous lesquelles un objet est disponible. La contrainte essentielle est la suivante : si $e \sqsubseteq e'$ et qu'un objet a est disponible dans e, alors cet objet est également disponible dans *e'*.

Dans le cadre constructiviste qu'impose la logique intuitionniste, le comportement des connecteurs suivants mérite une attention particulière : la négation (nous ne pouvons pas dire « $e \vDash \neg A$ si et seulement si $e \nvDash A$ » car les étapes sont potentiellement incomplètes), l'implication ($A \rightarrow B$ n'est plus équivalent à $\neg A \vee B$ car cette dernière formule implique $\neg A \ldots$), et les quantificateurs (suivant le réquisit constructiviste, pour affirmer $\exists x A(x)$, il nous faut *exhiber* un objet qui possède la propriété A, et pour affirmer $\forall x A(x)$ à une étape *e*, on doit s'assurer qu'une étape ultérieure ne contiendra pas un contre-exemple). Les clauses suivantes définissent *la vérité dans un* cas_e :

- $e \vDash \neg A$ si et seulement si, pour tout $e' \sqsupseteq e$, $e' \nvDash A$.
- $e \vDash$ A ∧ B si et seulement si $e \vDash A$ et $e \vDash$ B.
- $e \vDash$ A ∨ B si et seulement si soit $e \vDash$ A ou $e \vDash$ B.
- $e \vDash$ A → B si et seulement si, pour tout $e' \sqsupseteq e$, si $e' \vDash$ A alors $e' \vDash$ B.
- $e \vDash \forall x A(x)$ si et seulement si, pour tout $e' \sqsupseteq e$ et pour chaque a disponible à *e'*, $e' \vDash \mathrm{A}(a)$.
- $e \vDash \exists x A(x)$ si et seulement si $e \vDash$ A(a) pour au moins un α disponible à *e*.

Les étapes constructivistes nous offrent une spécification des cas_x dans GTT (cas_e) ainsi qu'une spécification de « vrai dans un cas_e ». GTT devient alors :

> (GTT_e) : Un argument est valide si et seulement si, dans toutes les étapes où les prémisses sont vraies, la conclusion l'est également.

Les contraintes constructivistes s'expriment ici par les contraintes sur les étapes ultérieures de la construction d'une preuve, soit par $e' \sqsupseteq e$, ce qui nous offre une relation de conséquence intuitionniste.

5.2 L'approche preuve-théorétique ou par la théorie des preuves

On commencera d'abord par relever une *confusion* qui pourrait persister chez certains lecteurs : celle entre la théorie des preuves (l'approche preuve-théorétique) et la sémantique preuve-théorétique. Ce sont là deux choses bien distinctes. L'expression « sémantique preuve-théorétique » peut apparaître à plusieurs comme une contradiction dans les termes, manuels de Logique à l'appui. En ouvrant un de ceux-ci, on commencera fort probablement par vous parler de l'alphabet du système en question, de ses atomes, de ses ebf; bref, de sa syntaxe. Cette présentation sera suivie de la formulation d'un système déductif (axiomes et règles d'inférences), un *système à la Hilbert* où les preuves seront traitées *formellement*, comme des objets syntaxiques en quelque sorte, ce qui aboutira à une notion syntaxique de conséquence logique. La prochaine étape consistera à fournir une *sémantique* pour cette syntaxe et ce système déductif - vide de signification? -, plus souvent qu'autrement à l'aide de la *théorie des modèles* tarskienne[105]. Le langage sera donc interprété à l'aide de ces structures ensemblistes que sont les modèles, et on démontrera ensuite deux propriétés hautement désirables, la fiabilité et la complétude sémantique, qui établissent l'équivalence extensionnelle de la formulation preuve-théorétique et de la formulation modèle-théorétique (sémantique) de la logique en question.

Que faire d'une *sémantique* preuve-théorétique? La contradiction n'est qu'apparente : l'approche modèle-théorétique est *une* manière de fonder la notion de conséquence logique (c'était l'intention de Tarski), et si la méthodologie derrière les théorèmes de fiabilité et de complétude suggère que la signification des constantes logiques est déterminée par les fonctions de vérité, il reste que l'on peut raisonnablement douter que le problème – *celui de savoir ce qui se passe effectivement dans la pratique* – soit aussi facilement résolu. Inspirés d'une suggestion faite par Gentzen lui-même, ce grand théoricien des preuves, Dummett et Prawitz, dans le milieu des années 1950, suggèrent avec force que la signification des constantes logiques est déterminée par les *règles d'inférence* des systèmes à la Gentzen. Plus précisément, la signification d'une particule dite « logique » serait déterminée par le rôle inférentiel qu'elle occupe au sein

[105] C'est le logicien qui parle : que faites-vous de la sémantique de Heyting?

des règles qui nous permettent de l'introduire et de l'éliminer; le rôle qu'elle occupe au sein de la *dynamique* de notre pratique déductive. Voilà ce qu'est la sémantique – un terme galvaudé pour « signification » donc « interprétation » – preuve-théorétique. La suggestion est forte, mais elle ne nous intéresse pas ici. «Fonder » la notion de conséquence logique par la théorie des preuves est autre chose, bien que les deux projets soient intimement reliés.

5.2.1 Le calcul des séquents LK[106]

On commence par formuler le calcul des séquents dans sa forme classique, soit le calcul sans restrictions, plein pouvoir expressif – bien qu'à proprement parler, la logique linéaire « recapture » la mécanique déductive classique… Ce ne sont que les grandes lignes de *LK*; plus de détails nécessiteraient au moins la preuve du *Hauptsatz*, l'exposition du système sans coupure et celle de la propriété de la sous-formule, mais ces détails peuvent être ignorés pour les besoins de la cause.

5.2.1.1 Le concept de séquent

Définition 5.2.1.1 Un *séquent* de *LK* est une expression de la forme $\Gamma \vdash \Theta$ pour $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots B_m$, avec $n, m \geq 0$, dont la signification intuitive est $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \supset (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$.

Le séquent vide « $\vdash$ » nous dit que sans aucune hypothèse, on n'a déjà une impossibilité. Il signifie donc ici l'absurdité. S'il est démontrable, la théorie est nécessairement contradictoire. Par transitivité, si on a $\vdash A$ et $A \vdash$ on obtient $\vdash$, ce qui revient à dire que $\vdash$ est le résultat de $A \wedge \neg A$. Ainsi, $A_1, \ldots, A_n \vdash$ signifie que sur la base de ces hypothèses, aucune possibilité ne reste ouverte, qu'elles sont incompatibles; $A \vdash$ signifie $\neg A$ et $\vdash A$ signifie que l'on affirme A. Nous remplaçons ici le symbole auxiliaire $\longrightarrow$ de Gentzen par $\vdash$ [107]. Les formules $A_1, \ldots, A_n$ forment l'antécédent et les

---

[106] L'exposition « originale » se trouve dans Gentzen (1964). Pour une exposition « traditionnelle » de la théorie des preuves, voir Buss (1998). Pour des cours éclatés (géniaux) de théorie des preuves nourris aux développements récents en informatique théorique, voir *Le Point Aveugle tome I et II* de Girard (2006) et *Proofs and Types* de Girard, Taylor et Lafont (2003). Le traitement de ce qui suit s'inspire plus directement de Girard (2006), et Ono (2003) dans le contexte plus restreint des logiques sous-structurelles.

[107] Admettons que $\vdash$ caractérise la relation de déductibilité des systèmes de déduction naturelle, on remarquera que le symbole introduit par Gentzen, $\longrightarrow$, correspond au premier au sens où $\Gamma \longrightarrow \Theta$ peut être

formules $B_1, \ldots B_m$ le conséquent (succédent). La chose essentielle est la suivante : nous ne nous intéressons pas aux formules *A, B, C…* en tant que telles, mais uniquement à la manière dont elles apparaissent à l'intérieur du séquent; à leurs *positionnements*, pour ainsi dire.

5.2.1.2 Les trois groupes de règles

Les règles d'inférences de LK se divisent en trois catégories : identité, logique, structurelle.

Groupe identité Ces deux règles sont génériques dans la mesure où elles font intervenir une formule *A* arbitraire. La coupure nous dit l'identité des deux occurrences de *A – c'est la formule de coupure* -, l'une à gauche, l'autre à droite. La réflexivité est un « axiome ».

$$\frac{}{A \vdash A} \ (Identité) \qquad \frac{\Gamma \vdash A; \Theta \quad \Lambda; A \vdash \Delta}{\Gamma; \Lambda \vdash \Theta; \Delta} \ (Coupure)$$

Si l'on garde en mémoire l'interprétation « naïve » qui fait du $\vdash$ dans un calcul des séquents une forme *d'implication*, on remarquera également que le *modus ponens* et la *transitivité* ne sont que des cas particuliers de la coupure (Girard, 2006 :60):

$$\frac{\vdash A \quad A \vdash B}{\vdash B} \ (MP) \qquad \frac{\mathrm{A} \vdash B \qquad \mathrm{B} \vdash \mathrm{C}}{\mathrm{A} \vdash \mathrm{C}} \ (Transitivité)$$

Groupe logique La symétrie du calcul des séquents se retrouve dans l'ensemble des règles : c'est une *symétrie droite/gauche*. Cela se voit dans l'orthogonalité entre la règle

interprété comme $\Gamma \vdash \Theta$. C'est ce qui fait dire à Prawitz que le calcul des séquents est un meta-calculi pour les systèmes de déduction (1965 :90).

qui introduit le connecteur à gauche du tourniquet et celle qui l'introduit à droite. À voir ici avec la règle binaire et les deux règles unaires pour la conjonction :

$$\frac{\Gamma \vdash A; \Theta \quad \Gamma \vdash B; \Theta}{\Gamma \vdash \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}; \Theta} \ (\vdash \wedge) \qquad \frac{\Gamma; \mathrm{A} \vdash \Theta}{\Gamma; \mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \vdash \Theta} \ (l \wedge \vdash)$$

$$\frac{\Gamma; \mathrm{B} \vdash \Theta}{\Gamma; \mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \vdash \Theta} \ (r \wedge \vdash)$$

Les règles pour la disjonction sont le *miroir* de celles pour la conjonction :

$$\frac{\Gamma; \mathrm{A} \vdash \Theta \quad \Gamma; \mathrm{B} \vdash \Theta}{\Gamma; \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vdash \Theta} \ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathrm{A}; \Theta}{\Gamma \vdash \mathrm{A} \vee \mathrm{B}; \Theta} \ (\vdash l \vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{B}; \Theta}{\Gamma \vdash \mathrm{A} \vee \mathrm{B}; \Theta} \ (\vdash r \vee)$$

Ensuite, pour l'implication et les quantificateurs :

$$\frac{\Gamma \vdash A; \Theta \quad \Delta; \mathrm{B} \vdash \Lambda}{\Delta; \mathrm{A} \to \mathrm{B}; \Gamma \vdash \Lambda; \Theta} \ (\to \vdash) \qquad \frac{\Gamma; \mathrm{A} \vdash B; \Theta}{\Gamma \vdash A \to B; \Theta} \ (\vdash \to)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A; \Theta}{\Gamma \vdash \forall x A; \Theta} \ (\vdash \forall) \qquad \frac{\Gamma; A[{}^{t}/_{x}] \vdash \Theta}{\Gamma; \forall x A \vdash A; \Theta} \ (\forall \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[{}^{t}/_{x}]; \Theta}{\Gamma \vdash \exists x A; \Theta} \ (\vdash \exists) \qquad \frac{\Gamma; \mathrm{A} \vdash \Theta}{\Gamma; \exists x A \vdash \Theta} \ (\exists \vdash)$$

Reste deux dernières règles qui nous permettent de passer d'un côté ou de l'autre du tourniquet; elles expriment l'échange gauche/droite. Donc, les règles pour la négation :

$$\frac{\Gamma; \mathrm{A} \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \neg A; \Theta} \ (\vdash \neg) \qquad \frac{\Gamma \vdash A; \Theta}{\Gamma; \neg \mathrm{A} \vdash \Theta} \ (\neg \vdash)$$

Groupe Structurel Les règles de ce groupe nous permettent de déterminer la signification des points virgules. En fait, un examen minutieux du comportement de ces règles nous permet de confirmer l'intuition de Gentzen[108] :

Définition 5.2.1.2 Un *séquent* $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots B_m$ est *prouvable* dans LK si et seulement si $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \vdash (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$ y est prouvable.

Les points-virgules à gauche du tourniquet peuvent donc être interprétés comme des conjonctions, et ceux à droite comme des disjonctions. On notera les propriétés algébriques qu'elles expriment - et la symétrie gauche-droite.

Les règles d'*échange* exprime la *commutativité* et l'*associativité* de la Logique; elles permettent la permutation de chaque côté du séquent. Se départir de celles-ci revient à offrir une logique non-commutative (voir Abrusci et Ruet, 2000)[109].

$$\frac{\Gamma; \mathrm{A}; \mathrm{B} \vdash \Theta}{\Gamma; \mathrm{B}; \mathrm{A} \vdash \Theta} \quad (E \vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \mathrm{A}; \mathrm{B}; \Theta}{\Gamma \vdash \mathrm{B}; \mathrm{A}; \Theta} \quad (\vdash E)$$

Les règles d'*affaiblissement* expriment la possibilité d'ajouter des hypothèses fictives : c'est ce qui exprime la *monotonie* du système classique.

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma; \mathrm{A} \vdash \Theta} \quad (A \vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \mathrm{A}; \Theta} \quad (\vdash A)$$

Les règles de *contraction* expriment la possibilité de réutiliser les hypothèses. C'est, selon l'expression de Girard, la *pérennité* des propriétés logiques classiques. On y voit très clairement l'*idempotence* de la conjonction et la disjonction classique :

---

[108] Voir Ono (2003 :181).

[109] On s'intéressera également à la géométrie non-commutative de Connes (1994). La logique quantique, qui abandonne les lois de de Morgan, peut être formulée comme une logique non-commutative.

$$\frac{\Gamma; A; A \vdash \Theta}{\Gamma; A \vdash \Theta}\ (C \vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A; A; \Theta}{\Gamma \vdash A; \Theta}\ (\vdash C)$$

Définition 5.2.1.3 Une *dérivation (preuve)* de $\Gamma \vdash \Theta$ dans *LK* est un arbre tel que (i) sa racine est de la forme $\Gamma \vdash \Theta$ où Γ et Θ ont au moins un élément en commun; (ii) chaque nœud est un séquent de *LK*; (iii) toute inférence dans l'arbre est une instance d'une des règles d'inférences de *LK*, i.e. que tout autre occurrence de séquent *S* se trouve immédiatement sous une ou deux occurrences de séquents, disons S_1 et/ou S_2, tel que respectivement (S_1/*S*) ou (S_1, S_2/*S*) est une instance d'une des règles d'inférence de *LK*.

Définition 5.2.1.4 On dit que Θ est une *conséquence syntaxique* de Γ dans *LK*, on note $\Gamma \vdash \Theta$, si et seulement si il existe une dérivation de $\Gamma \vdash \Theta$ dans *LK*.

On retrouve dans ces définitions l'adage pour l'antiréalisme de Dummett (1991) et Brandom (1994) : en favorisant une formulation des différentes logiques dans des systèmes à la Gentzen, le concept de conséquence logique est analysé en termes de *préservation du droit d'asserter*, i.e. que pour asserter $\Gamma \vdash A$, chaque nœud de l'arbre où l'on asserte un séquent *S* en vue de l'obtention de $\Gamma \vdash A$ doit être *autorisé* par l'application d'une règle d'inférence[110].

5.2.2 Les logiques sous-structurelles[111]

Une logique est dite sous-structurelle dans la mesure où elle rejette une ou plusieurs des règles structurelles admises par *LK*. En acceptant l'idée que deux logiques

[110] Les argumentations de Brandom et Dummett sont forgées dans leur projet d'une théorie inférentialiste de la signification. La forme particulière d'inférentialisme que l'on peut attribuer à Brandom (un inférentialisme fort contrairement à un hyperinférentialisme dans le cas de Dummett) donne lieu, dans Brandom (2008), à une logique des relations d'incompatibilités dont la relation de conséquence *est* classique…

[111] Le terme « logiques sous-structurelles » a été introduit par Kosta Dosen dans une conférence prononcée à Tübingen en 1990. Voir Dosen et Schröder-Heister (1993). Voir Restall pour une introduction plus récente (2000).

sont alternatives *si et seulement si* elles diffèrent uniquement quant aux règles structurelles qu'elles admettent (Dosen, 1989 : 376), on peut identifier les logiques sous-structurelles aux *systèmes rivaux* du groupe des *logiques non-classiques*. Les *systèmes enrichis* (les logiques modales) *supplémentent LK* au sens où ils ajoutent des constantes logiques tout en conservant les mêmes hypothèses structurelles. C'est le cœur du pluralisme logique dans cette perspective.

Admettons que $\mathcal{B}$ dénote la *logique sous-structurelle de base*[112], i.e. un calcul des séquents qui ne possède aucune règle structurelle, et que E_1, E_2, A_1, A_2, C_1, C_2 dénotent respectivement les deux règles d'échange $(E \vdash)$ et $(\vdash E)$, les deux règles d'affaiblissement $(A \vdash)$et $(\vdash A)$ et les deux règles de contraction $(C \vdash)$ et $(\vdash C)$, on peut classifier les logiques non-classiques en fonction des règles structurelles qu'elles admettent. Un exemple : un système S qui admet seulement C_1 sera noté $S = BC_1$. Là où un système admet les deux règles pour l'échange (gauche et droite) par exemple, on se permettra de noter simplement BE, où $E = E_1\ et\ E_2$. Pour chaque système esquissé on tissera, *dans la limite de nos connaissances*, les liens entre les hypothèses structurelles admises et les contraintes inférentielles au niveau du système formel en tant que tel.

5.2.2.1 La logique intuitionniste

Le calcul des séquents intuitionnistes *LJ* est uniquement composé de séquents de la forme $\Gamma \vdash A$ pour $A_1, \dots, A_n \vdash B$, où $n \geq 0$ et où *B* peut être vide. Cette restriction de *LK* à des séquents ayant une seule formule dans le succédent est *équivalente* à l'exclusion de la loi du tiers exclus dans le système de déduction naturelle intuitionniste *NJ* (Gentzen, 1964 : 297); la constructivité algorithmique due à l'isomorphisme de Curry-Howard est à la porte. Cette restriction entraîne une modification de l'ensemble des règles structurelles au coût de la perte de la symétrie gauche-droite : *LJ* rejette E_2 et C_2 car elles sont rendues inutiles par la restriction, et on y assume que les succédents des règles de gauche contiennent tout au plus une formule. La règle d'affaiblissement sur la droite

---

112 L'idée d'une logique sous-structurelle de base et d'une classification en fonction d'elle provient de Restall (2000 : 39). On retrouve la même idée dans Ono (2003). On remarquera que le calcul de Lambek L ne contient aucune des règles structurelles de LK, et que l'on peut donc l'identifier à $\mathcal{B}$.

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash A; \Theta}$$

est remplacée par

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A,}$$

ce qui revient à conserver $A \wedge \neg A \vdash B$, et le rejet de la règle pour la contraction, qui intervient dans la preuve du tiers exclu, revient à un rejet de la complémentation, soit $A \vee \neg A = V$ et $A \wedge \neg A = F$. Une des caractéristiques du rejet de certaines règles structurelles est que certains connecteurs qui étaient équivalents au sein de la logique classique apparaissent désormais distincts. Dans le cas intuitionniste, la négation perd la caractéristique *involutive* classique, soit $\neg\neg A \to A$ et $A \to \neg\neg A$, et l'implication est modifiée dans la mesure où $A \to B$ n'est plus équivalent à $\neg(A \wedge \neg B)$ ou $\neg A \vee B$. *C'est cela qui justifie le principe de Girard*, i.e. l'introduction de nouveaux connecteurs en fonction de ces nouvelles distinctions, tout en *ajustant* convenablement les règles du groupe logique. Par exemple, on pourrait ici introduire une négation intuitionniste $\urcorner$ et une implication intuitionniste $\sqsupset$. La classification est donc $\boldsymbol{LJ = BE_1AC_1}$, supposant que la modification de A_2 n'est pas un rejet à proprement parler.

5.2.2.2 Les logiques de la pertinence

Les logiques de la pertinence sont motivées par le développement d'une contrainte de *pertinence* sur la relation de conséquence logique. L'idée consiste à dire que si nous avons $\Gamma \vdash B$, alors c'est que Γ doit être pertinent (« relevant ») à la déduction de B. On rencontre cette idée dans les paradoxes de l'implication (ou de la pertinence), ces théorèmes qui semblent « suspects au sens commun », suivant l'expression de Lewis (1970 : 351). Un de ceux-ci est $A \to (B \to A)$. Si l'on prend la règle de l'affaiblissement sur la gauche (ici avec une seule conclusion)[113]

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma; A \vdash B,}$$

[113]Marion (2007 : 259-261).

il nous est possible de dériver $A \to (B \to A)$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathrm{A} \vdash \mathrm{A} \quad \text{id}}{\mathrm{A}; \mathrm{B} \vdash \mathrm{A}} \; (A \vdash)}{\mathrm{A} \vdash \mathrm{B} \to \mathrm{A}} \; (\vdash \to)}{\vdash \mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{A}).} \; (\vdash \to)$$

Cela montre très clairement que les règles d'affaiblissement ont un rôle à jouer dans les paradoxes de la pertinence. Conséquemment, un calcul des séquents pertinentistes *R* rejettera les deux règles pour l'affaiblissement tout en conservant les autres. Sa classification est donc $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{BEC}$. La condition de pertinence entre les prémisses et les conclusions s'exprime à travers ce rejet : en présence de $\Gamma \vdash \Theta$ il se peut que nous n'ayons pas $\Gamma; \mathrm{A} \vdash \Theta$ car le nouveau matériel *A* peut ne pas être *pertinent* pour la déduction. Encore ici, il nous est possible de distinguer des nouveaux connecteurs : le connecteur « Fois » $\otimes$ (« fusion ») et le connecteur « Par » $\mathfrak{H}$ (« fission »). Enfin, on remarquera que toute logique de la pertinence est *paraconsistante* (elle rejette $A \wedge \neg A \vdash B$) et que le rejet des deux règles pour l'affaiblissement donne lieu à des logiques *non-monotones* qui permettent de modéliser les raisonnements annulables (« defeasible »), i.e. des raisonnements dont la validité change avec l'ajout de nouvelles informations. Ainsi, un raisonnement « défaisable » violerait en quelque sorte le passage de $\Gamma \vdash \mathrm{B}$ à $\Gamma; \mathrm{A} \vdash \mathrm{B}$, ce qui correspond très exactement à la règle d'affaiblissement (sur la gauche)…

5.2.2.3 La logique linéaire

La logique linéaire nous offre une modélisation *dynamique* du comportement déductif en termes d'*actions* et de *réactions* (Girard, 1997 : 31-37). Une action a un certain prix; elle coûte quelque chose. En agissant sur mon environnement pour obtenir B, il *consume* quelque chose en retour, disons A. La logique classique nous offre une modélisation *statique* du comportement déductif en termes de *situations*. Ces situations sont figées dans le temps : on s'intéresse à des déductions $A \to B$ où A et B sont en quelque sorte des vérités éternelles car on pourra toujours réutiliser *A*. Cela fonctionne très bien dans le cas des mathématiques, mais dans la vie courante ainsi que dans un certain nombre de sciences autres que les mathématiques, il arrive que l'on s'intéresse à des *transformations* entre états passagers, où *A* est *échangé* contre *B*. Dans le cadre d'une telle logique des « actions », où les *mouvements déductifs sont payants*, les hypothèses dans les preuves sont comprises comme des *ressources* qui seront utilisées donc consumées lors de la dérivation; elles seront utilisées une seule fois. Ainsi, il nous sera possible de prouver $A \rightarrow B$ seulement si la formule *A* est exactement la ressource qu'il nous faut pour obtenir *B* au sens où elle ne doit être ni trop *forte* ni trop *faible*. On voit tout de suite que les règles de contraction et d'affaiblissement posent problème. Pour Girard, les premières correspondent au *principe d'inoxydabilité des formules* : on utilise *A* pour obtenir *B* mais *A* reste intacte, ce qui est très exactement exprimée dans la permission de passer de $\Gamma \vdash A; A; \Theta$ à $\Gamma \vdash A; \Theta$. Les règles d'affaiblissement posent un problème similaire car elles nous permettent de passer de $\Gamma \vdash \Theta$ à $\Gamma; A \vdash \Theta$. Or si nous avons réussi à prouver $\Gamma \vdash \Theta$ dans un cadre linéaire, c'est que les ressources étaient adéquates et qu'il n'y a donc aucune garantie que la formule A y ait sa place. On s'en doute, la logique linéaire rejette ces règles; l'idempotence et la monotonie sont ici deux propriétés indésirables. La commutativité, elle, est inoffensive.

Cela permet à Girard d'introduire deux groupes de règles distincts : (1) le groupe additif formé des connecteurs « Plus » $\oplus$ et « Avec » & et (2) le groupe multiplicatif formé des connecteurs « Fois » $\otimes$ et « Par » $\parr$. On doit ajouter la négation linéaire $A^{\perp}$et l'implication linéaire $\multimap$, bien que la négation soit une méta-notation et non un connecteur, et que l'implication soit définissable à l'aide des groupes ci-haut. Notons en passant l'interprétation intuitive de $A \multimap B$: pour obtenir *B*, je *paye* avec *A* et ce faisant, je n'ai plus A… Les deux premiers groupes forment le fragment multiplicatif-additif de la logique linéaire, soit *MALL*, un fragment *constructif.* Sa classification est la suivante : $\boldsymbol{MALL} = \boldsymbol{BE}$. On terminera en notant que la logique linéaire (complète) admet un troisième groupe de règles composé des connecteurs exponentiels « ! » et « ? ». Ce groupe réintroduit en force les règles de contraction et d'affaiblissement en tant que *règles logiques*, nous permettant de recapturer la mécanique déductive de *LK*.

5.2.2.4 *Les logiques polyvalentes*

C'est le problème des futurs contingents qui motiva Lukasiewicz, au début des années 1920, à la formulation de L_3, le premier système de logique polyvalent. La bivalence de la logique classique lui apparaissait déficiente dans le mesure où elle ne permettait pas de déterminer la valeur de ces énoncés contingents qui portent sur le futur, et qui sont donc indéterminés dans le présent. D'où l'introduction d'un système trivalent contenant une troisième valeur de vérité, i, soit l'indétermination ontique. Cette modification de la bivalence classique réduit la classe des théorèmes/inférence valides de L_3 – il est syntaxiquement inclus dans la logique classique – et brise le treillis de Boole. Deux conséquences notables sont la perte de l'idempotence de la conjonction et de la disjonction dans L_3, donc $A \wedge A \neq A$ et $A \vee A \neq A$, ainsi que l'abandon de l'involution $(\neg\neg A \rightarrow A)$ et la complémentation classique $(A \vee \neg A = V$ et $A \wedge \neg A = F)$. Ces propriétés se généralisent aux logiques polyvalentes ayant *n* valeur de vérité, les logiques L_n, et donc aux *logiques floues*. Ainsi, d'un point de vue sous-structurel, on caractérise les logiques polyvalentes par un rejet des deux règles pour la contraction,

$$\frac{\Gamma; A; A \vdash \Theta}{\Gamma; A \vdash \Theta}\ (C \vdash) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A; A; \Theta}{\Gamma \vdash A; \Theta}\ (\vdash C)$$

celles-ci exprimant justement l'idempotence de $\wedge$ et de $\vee$. La classification d'une logique polyvalente *P* est donc : $\boldsymbol{P = BEA}$.

Les logiques du type *BEA* ont fait l'objet de nombreuses études d'un point de vue algébrique (Ono, 2003; Ono et Komori, 1985; Kowalski et Ono, 2001). De manière générale, les logiques sous-structurelles peuvent être interprétées par des treillis résidués (« residuated lattices »), des structures algébriques de type $A = \langle A, \wedge, \vee, \otimes, /, \backslash, 1 \rangle$, composées d'un treillis et d'un semi-groupe partiellement ordonné avec loi de résiduation. On obtient plus spécialement les logiques polyvalentes de Lukasiewicz en introduisant une structure *P* qui dénote l'ensemble $\{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$ pour les logiques à *n* valeur de vérité ou l'unité d'intervalle [0,1] pour les *logiques floues* (avec un nombre infini de valeurs de vérité…) pour ensuite définir les deux opérations suivantes sur P :

- $x \rightarrow y = min\{1{,}1 - x + y\}$
- $x \otimes y = max\{0, x + y - 1\}$.

Cela nous donne un treillis résidué $P = \langle P, min, max, \otimes, \rightarrow, 1 \rangle$ qui, s'il satisfait $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$ pour tout *x, y*, fera office de structure algébrique pour une logique polyvalente *P*. Enfin, on notera qu'il est possible de formuler L_3 sans rejeter de lois structurelles en lui offrant plutôt une sémantique bivalente non-vérifonctionnelle (Béziau, 1999). Dans cette perspective, il convient de considérer une logique polyvalente comme un supplément de *LK* au sens où elle offre une sémantique plus riche en fonction du nombre de valeurs de vérité qu'elle admet.

5.2.3 « In a nutshell » : le pluralisme dans un cadre sous-structurel

La raison pour laquelle nous disons, suivant Prawitz et beaucoup d'autres, que le calcul des séquents est un *méta-calculi* est la suivante : le langage des séquents rend *explicite* les *hypothèses structurelles* gouvernant le comportement des connecteurs et des règles logiques qui sont *implicites* dans les différents systèmes formels lorsqu'ils sont formulés en termes de système de déduction naturelle ou de système à la Hilbert. D'un point de vue algébrique, formaliser les logiques au sein du calcul des séquents nous permet de révéler des *relations de résiduation* qui sont cachées au niveau des systèmes formels en tant que tels (Ono, 2003). Ces hypothèses structurelles sont articulées par le groupe des *règles structurelles*, qui appartiennent à un autre niveau - métalogique disons - au sens où elles expriment des contraintes qui gouvernent les preuves. Ces contraintes correspondent de fait à des *propriétés algébriques* d'ordre général : commutativité, associativité, monotonie et idempotence.

Deux logiques qui n'admettent pas les mêmes règles structurelles n'auront pas la même relation de conséquence logique. Cela a été confirmé par l'exposition des différentes logiques ci-haut, nous montrant de ce fait même la fertilité du calcul des séquents pour la *comparaison* des logiques entre elles. Une d'entre elles serait-elle la seule logique correcte? Ici, la réponse du moniste est particulièrement inintéressante. Les logiques non-classiques rivales spécifient *chacune à leur manière* une relation de conséquence logique de type preuve-théorétique, dans *un cadre conceptuel fixe*, celui du métacalculus des séquents, non pas en modifiant directement les règles logiques mais en jouant avec les règles qui gouvernent la *structure* des preuves, modifiant donc ce qu'il sera possible de *prouver* à l'aide des règles logiques. Ces différentes relations de conséquence sont correctes au sens où elles sont des instances du cadre général offert par le calcul des séquents. C'est en ce sens précis que le point de vue des logiques sous-structurelles nous offre un pluralisme logique.

5.3 L'approche dialogique

À notre connaissance, il n'y a pas de manuels de logique dialogique. Nous offrirons donc une exposition détaillée en portant une attention particulière au langage dialogique, à sa syntaxe, qui comporte plusieurs concepts essentiels à la compréhension des règles dans le contexte des *jeux* dialogiques[114]. On commencera par formuler un langage *L* pour une logique dialogique classique du premier ordre *LDC* pour ensuite exposer les deux groupes de règles, soit les règles pour les particules logiques (« particle rules ») et les règles structurelles, terminant avec la notion de validité *formelle* propre à celle-ci. Dans un cadre dialogique, on obtient un système intuitionniste *LDI* en gardant fixe les règles (pour les particules) logiques puis en modifiant une règle structurelle, un système paraconsistant *LDP* et un système de logique libre (« free logic ») *LDL* en ajoutant une règle structurelle (différente dans les deux cas) et des systèmes de logiques modales en ajoutant des règles logiques et structurelles[115].

Le point de vue des logiques sous-structurelles par la théorie des preuves et l'approche dialogique ont donc cela en commun : ils forment deux *cadres conceptuels d'ordre général* nous permettant d'y formuler différentes logiques en jouant avec deux groupes de règles distincts – situés à deux niveaux différents devrait-on dire. Le

[114] Nous suivrons Rückert (2001) et Rahman et Keiff (2005) dans notre exposition. Voir également Rahman & Tulenheimo (2006) et Lorenz (1981). Pour les programmes philosophiques entourant les jeux dialogiques, voir Marion (2009;2010), Marion & Castelnérac (2009) et Keiff & Rahman (2010).

[115] Les résultats présentant les différents systèmes qui peuvent être formulés dans un cadre dialogique se trouvent dans Rückert (2001), Rahman & Keiff (2005), Rahman & Carnielli (2000), Rahman & Rückert (1998) et Rahman, Rückert & Fischmann (1997).

pluralisme logique suit essentiellement les mêmes lignes : les différentes logiques qui sont formulées en tant que systèmes dialogiques spécifient chacune à leur manière une notion dialogique de validité en modifiant les règles structurelles et/ou logiques, ces modifications entrainant à leur tour une modification de la classe des formules valides dans un système particulier. Les règles structurelles de l'approche dialogique sont des contraintes qui gouvernent l'organisation (la structure) d'un jeu dialogique, celui-ci pouvant être compris comme une suite finie de mouvements alternés nous permettant de *prouver* une formule. Le parallèle entre les deux approches est suffisamment apparent. On terminera par la présentation de *LDP* et *LDL*.

5.3.1 Le langage L de la logique dialogique classique (LCD)

- Les connecteurs standards $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ et les quantificateurs $\forall, \exists$.
- Les lettres minuscules $p, q, r \ldots$ pour les formules atomiques et les lettres majuscules *A, B, C…* pour les formules complexes.
- Les lettres majuscules **A, B, C…** en caractère gras pour les prédicats, les constantes t_i où $i \in \mathbb{N}$ et les variables *x, y, z…*
- Les symboles de force ?... et !... où les points de suspension sont des indices qui seront spécifiés par les règles appropriées.
- Les symboles **D** et **A** qui dénotent les joueurs du jeu, soit **D** pour le défenseur (« proponent ») et **A** pour l'attaquant (« opponent »), et des variables *X* et *Y* pour exprimer la possible permutation de **D** et **A**, où $X \neq Y$.

Définition 5.3.1.1 Une *expression e* de *L* est soit une constante, une formule[116] ou un symbole de force, chaque expression *e* pouvant être augmentée des symboles **D** ou **A** formant alors des *expressions signées* du type **D**-*e* / **A**-*e*. On obtient également des *expressions libres* du type *X-e* / *Y-e*.

Un *jeu dialogique* est une suite finie de *mouvements* qui *alternent* entre *deux joueurs*, le défenseur **D** et l'attaquant **A**; il se termine par la victoire d'un des deux joueurs et la défaite de l'autre. Chaque jeu dialogique commence par l'*assertion* d'une

[116] Les formules sont ici les *ebf* traditionnelles de L, i.e. l'ensemble EBF_L tel que : (1) $p, q, r \ldots \subseteq EBF_L$; (2) Si $A \in EBF_L$, alors $\neg A \in EBF_L$; (3) Si $A, B \in EBF_L$, alors $(A \rightarrow B) \in EBF_L$; et ainsi de suite pour le reste des constantes logiques.

thèse de la part du défenseur et est suivie d'une attaque de la part de l'attaquant, ces rôles pouvant être permutés à chaque nouvelle séquence du jeu. À l'exception de l'assertion de la thèse initiale par **D**, chaque nouvelle expression *e* d'une séquence de jeu est un *mouvement*, i.e. une attaque ?... ou une défense !... Un jeu dialogique peut être compris comme une séquence d'expressions étiquetées (en fonction du joueur) *déterminée* de manière *dynamique* par les règles du jeu. Un mouvement en réponse à un autre forme un tour (« a round ») dans le jeu.

5.3.2 Les règles (pour les particules) logiques

Une *forme argumentative* ou une règle pour une particule logique est une description abstraite – elle ne fait pas référence au contexte d'une joute particulière - de la manière dont une formule, selon sa constante logique principale, peut être critiquée, et comment il nous est possible de répondre à ces critiques, établissant ainsi la signification dialogique des constantes logiques (Rahman et Keiff, 2005 : 364). La tradition en présence veut que cette sémantique soit *locale* au sens où une règle logique détermine le ou les mouvement(s) possible(s) (les *choix* possibles qui s'offrent à nous) qui *suivent* l'assertion d'une formule contenant une constante particulière; elle détermine comment on peut étendre un état *S* du jeu à un autre état *S'* sans que l'on sache *comment relier* les différentes formes argumentatives pour produire un jeu dialogique bien défini, la structure duquel se trouve être organisée par les règles structurelles.

	$\neg$	$\wedge$	$\vee$
Assertion	X-$\neg A$	X-$A \wedge B$	X-$A \vee B$
Attaque	Y-A	Y-$?_g$ ou Y-$?_d$	Y-$?_\vee$
Défense	$\otimes$	X-A ou X-B	X-A, ou X-B
	$\rightarrow$	$\forall$	$\exists$
Assertion	X-$A \rightarrow B$	X-$\forall x A$	X-$\exists x A$
Attaque	Y-A	pour tout *t*, Y-$?_{\forall/t}$	Y-$?_\exists$
Défense	X-B	pour tout *t* choisi par Y, X-$A(x/t)$	pour tout *t*, X-$A(x/t)$

Le ⊗ dans la règle pour la négation signifie qu'il n'y a aucune défense possible de la part du défenseur; seule une contre-attaque s'impose. La défense $A(x/t)$ de X consiste à substituer une constante t pour chaque occurrence de la variable x dans A. La caractérisation des constantes logiques par les séries de mouvements défenses/attaques permet de rendre compte du *mouvement déductif* de manière particulièrement convaincante, i.e. *dynamique*… La *signification* de la conjonction de $A \wedge B$ se retrouve dans la *dynamique* de l'interaction entre les deux joueurs. Admettant que j'affirme $A \wedge B$, *vous choisirez* laquelle des deux formules A ou B je dois défendre *en premier* – cela est explicite dans Y-$?_g$ *ou* Y-$?_d$, et dans la mesure où c'est vous qui choisissez, mon seul espoir de *gagner* consiste à pouvoir défendre *A et B*. La stratégie pour gagner une joute qui commence par l'assertion de $A \wedge B$ consiste donc à posséder des raisons permettant de défendre *A et de défendre B*[117]. Voyez la différence avec les conditions *sémantiques* de la conjonction dans une table de vérité!

5.3.3 Les règles structurelles

Certaines caractéristiques des jeux dialogiques évoquées plus haut, lors des commentaires concernant le langage de *LDC*, sont formulées explicitement dans des règles structurelles qui organisent la structure des jeux Ainsi, la première règle situe concrètement les tours d'un jeu dans un contexte particulier en établissant qui joue *X* et qui joue *Y*, supposant que dans la première étape **D** ait eu le rôle de *X* en établissant le sujet du dialogue, i.e. la thèse (Rahman et Keiff, 2005 : 368) :

> **(SR-0 Règle de départ)** : Les expressions d'un jeu sont numérotées et assertées alternativement par **D** et **A**. La thèse est assertée par **D**. Toutes les expressions numérotées par un nombre pair (incluant la thèse, numérotée par 0) sont *signées* par **D**, et toutes les expressions numérotées par un nombre impair sont des

[117] L'approche dialogique caractérise pertinemment un élément constitutif de nos pratiques inférentielles : le jeu qui consiste à offrir et à demander des raisons. Ce jeu forme le cœur de la théorie de l'assertion de Brandom et Dummett. Voir Marion (2009;2010) pour une intégration des deux approches en lien avec la logique dialogique.

mouvements de **A.** Chaque mouvement suite à l'assertion de la thèse est en réaction à un mouvement précédent.

On a ensuite une règle déterminant le gagnant d'un jeu dialogique :

(SR-1 Règle du gagnant) : *X* gagne le jeu si le mouvement étiqueté par le plus haut numéro est une expression signée par *X*, et qu'il n'y a plus aucune expression signée par *Y* qui soit permise par les règles.

En d'autres mots : le joueur qui n'a plus aucun mouvement possible (permis par les règles) perd la partie.

Dans la mesure où une joute dialogique peut être considérée comme un moyen de tester la validité d'une formule – la parenté avec l'*elenchus* socratique est relevée dans Marion & Castelnérac (2009) -, les formules doivent être considérées indépendamment de tout *modèle*, i.e. qu'il n'y *aucun* ensemble de formules atomiques concédées dès le départ par **A** (Rahman et Keiff, 2005 : 369) :

(SR-2 Règle formelle) : **D** ne peut pas introduire de formule atomique; toute formule atomique doit être initialement assertée par **A.**

On remarquera que cette règle permet de définir la *formalité* propre aux jeux dialogiques – une formalité établie indépendamment d'informations reliées aux faits atomiques - s'opposant sur ce point à des jeux *matériels*. On y reviendra sous peu.

On passe ensuite à la règle qui caractérise la clôture d'un tour (un mouvement attaque/défense) dans *LDC*. On peut déjà faire un pas vers le pluralisme dans un cadre dialogique : la seule différence entre la *logique intuitionniste* et la logique classique se trouve dans les règles pour la clôture des tours. On obtient une logique dialogique intuitionniste, soit *LDI*, en remplaçant SR-3C par SR-3I :

(SR-3C Règle classique) : Dans chaque mouvement, chaque joueur peut attaquer une formule complexe assertée par l'autre joueur ou se défendre contre n'importe quelle attaque, incluant celles contre lesquelles il s'est déjà défendu.

> **(SR-3I Règle intuitionniste) :** Dans chaque mouvement, chaque joueur peut attaquer une formule complexe assertée par l'autre joueur ou se défendre contre la dernière attaque qui n'a pas déjà été défendue.

Les deux règles présentées ci-haut ont un défaut : elles permettent que la même expression soit attaquée ou défendue un *nombre infini* de fois. Pour éliminer cette possibilité, il convient d'introduire la notion d'une répétition stricte et une règle qui n'autorise pas les stratégies consistant à retarder la fin du jeu par l'itération transfinie (!) d'un ou plusieurs tours. Nous parlons de la répétition stricte d'une attaque si et seulement si un mouvement est attaquée alors que ce *même* mouvement fut attaqué précédemment avec la *même attaque*; la répétition stricte d'une défense se justifie de la même manière.

Donc, la dernière règle :

> **(SR-4 Règle de retardement)** :
>
> - Au sein de *LDC*, **D** peut performer la répétition stricte d'une défense en assertant une formule atomique *p* deux fois (ou plus) si et seulement si **A** a concédé *p* deux fois (ou plus).
> - Au sein de *LDI*, **D** peut performer la répétition stricte d'une attaque si et seulement si **A** a introduit une nouvelle formule atomique qui peut désormais être utilisée par **D**.

La validité dans un cadre dialogique va comme suit :

Définition 5.3.3.1 Dans un système dialogique *LD* la proposition exprimée par la formule énonçant la thèse est *valide* si et seulement si **D** possède une *stratégie gagnante formelle* pour celle-ci, i.e. que **D** peut, suivant l'application des règles appropriées, réussir à défendre la thèse contre toutes les attaques possibles de **A**.

Là où l'approche sémantique définit la validité par la préservation de la vérité sous *toutes les interprétations*, l'approche dialogique introduit une notion de vérité formelle *plus stricte* en demandant non seulement l'existence d'une stratégie gagnante pour **D** pour une certaine *totalité* de dialogues, mais également l'existence d'une stratégie gagnante dans un certain type de jeu dialogique, i.e. dans *le dialogue formel* pour la formule en question (Rückert, 2001 : 174). Plus encore, contrairement à l'approche sémantique, l'approche dialogique ne présuppose pas que toutes les propositions atomiques ont une valeur de vérité. On terminera la présentation en exposant d'autres systèmes dialogiques qui correspondent à des logiques non-classiques.

5.3.4 La logique paraconsistante

La motivation derrière les logiques paraconsistantes consiste à refuser $A \wedge \neg A \vdash B$, cherchant par là à affirmer une distinction entre les théories qui sont triviales et celles qui sont inconsistantes. Le principe d'explosion étouffe cette distinction car d'une contradiction il nous est possible de dériver n'importe quelle proposition arbitraire *B*. Formaliser une théorie inconsistante dans une logique classique revient en quelque sorte à entériner sa trivialité. Un système *P* est dit *paraconsistant* s'il est inconsistant sans être trivial; s'il contient une contradiction sans que toutes les ebf ne soient des théorèmes de *P* (voir da Costa, 1977).

Ici, il fait donc sens de dire que l'on puisse asserter $A \wedge \neg A$, sans pour autant asserter à sa suite n'importe quelle proposition arbitraire. Il est possible de rendre compte de cette idée par l'introduction d'une règle structurelle qui nous offre une logique dialogique paraconsistante *LDP* (voir Rahman & Carnielli, 2000) :

> **(SR-6P)** : **D** est autorisé à attaquer la négation d'une formule atomique si et seulement si **A** a déjà attaqué cette formule auparavant.

Considérons l'exemple suivant, où **A** *asserte a et* $\neg a$ (Rückert, 2001 : 179) :

A			**D**		
				$(a \wedge \neg a) \to b$	(0)
(1)	$a \wedge \neg a$	0			
(3)	a		1	$?_G$	(2)
(5)	$\neg a$		1	$?_D$	(4)

A gagne.

Dans notre exemple, **A** gagne car **D** n'a plus de mouvements disponibles : SR-2 l'empêche d'asserter *b* et SR-6P ne lui permet pas d'attaquer $\neg a$. Ainsi, un joueur, ici **A**, a la possibilité d'asserter une contradiction sans que cela n'entraîne la possibilité pour l'autre joueur d'asserter une formule *b* dans n'importe quel jeu dialogique.

5.3.5 La logique libre (« free logic »)

Dans une interprétation objectuelle des quantificateurs de la logique classique, les termes singuliers qui instancient les variables d'une formule *doivent dénoter* un objet dans le domaine de discours $\mathcal{D}$ - un objet *existant*. Cela rend la logique classique particulièrement inapte à modéliser des domaines de discours où certains termes singuliers dénotent des objets inexistants ou des objets dont l'existence ou la non-existence nous ait inconnue. La logique libre remédie à cela en deux points : (1) les termes singuliers peuvent dénoter des objets à l'*extérieur* de $\mathcal{D}$; (2) les termes singuliers peuvent échouer à dénoter, i.e. qu'ils peuvent dénoter des objets inexistants [118]. La stratégie formelle consiste alors à *fortifier* les quantificateurs de manière à ce que leur simple utilisation comporte un *import existentiel*.

Dans un cadre dialogique, l'idée va comme suit : en utilisant une constante pour défendre un quantificateur existentiel ou pour attaquer un quantificateur universel, le joueur admet simultanément que cette constante dénote un *objet existant* (Rückert 2001 : 178). L'import existentiel est donc présupposé dans l'utilisation même des règles pour les quantificateurs. En supposant qu'une constante *t* est introduite ssi elle est utilisée pour la première fois pour défendre $\exists xA$ ou pour attaquer $\forall xA$, on obtient la règle structurelle suivante qui nous offre un système dialogique libre *LDL*:

(SR-7L) Il n'y a que **A** qui puisse introduire des constantes.

La logique libre n'est pas seulement une logique non-classique au sens où elle modifie une caractéristique clef de la logique classique : cette modification entraîne à son tour une variation de sa classe de théorèmes/inférences valides, à voir avec l'exemple suivant (Rückert 2001 : 178) :

[118] En fait, on pourrait simplement objecter à la logique classique qu'elle ne nous offre aucune raison convaincante pour l'adoption de la contrainte sur le domaine de discours, e.g. le fait qu'il ne puisse pas être non-vide. En logique catégorique, il nous est possible de travailler à l'aide de domaine non-vide en introduisant la notion d'un contexte de démonstration.

A			D	
			$Pn \to \exists x Px$	(0)
(1)	Pn	0	$\exists x Px$	(2)
(3)	$?_{\exists}$	2		

A gagne.

Une formule valide en logique classique, $Pn \to \exists x Px$, n'admet pas de stratégies gagnantes pour **D**; ce dernier perd car **A** n'a pas introduit de constante et SR-7L ne lui permet pas de le faire. L'exemple montre clairement que cette nouvelle règle structurelle rend compte de l'import existentiel supposée par l'assertion de $\exists x Px$ par **D**, soit l'existence d'une constante *b* qui satisfait ***P***, ce pourquoi il ne peut l'introduire lui-même.

5.4 Pluralisme et approches au concept de conséquence logique

Le lecteur pourra se demander laquelle de ces trois approches nous favorisons. Ou encore, celle que nous jugeons être *la bonne* approche au concept de conséquence logique. Notre réponse est la suivante : *aucune*; elles le sont toutes. Le présent chapitre visait à exposer le contenu théorique de trois approches qui sont en mesure de rendre compte, chacune à leur manière, du fait qu'il *existe* une *pluralité de logiques, de structures mathématiques bien définies* que l'on range sous « logique non-classique ». C'est en vertu de ce critère que nous affirmons qu'elles sont toutes *correctes*[119]. Pour ce qui est de la question entourant la signification des constantes logiques, une question intimement reliée au choix de l'approche au concept de conséquence logique, nous ferons l'assertion suivante : là où l'approche modèle-théorétique à la Tarski s'intéresse uniquement aux *dénotations statiques* des formules d'une logique, se contentant de nous offrir un simple « "$A \wedge B$" est vraie ssi A est vraie *et* B est vraie », plutôt artificiel, présupposant d'ailleurs la disponibilité d'un " $\wedge$ " dans un *métalangage* qui fraternise avec une forme de réalisme direct à travers l'utilisation de la convention T, l'approche preuve-théorétique et dialogique nous offre des *interprétations dynamiques* ancrées dans

[119] Pourtant, l'approche preuve-théorétique par le calcul des séquents peut faire beaucoup plus que les deux autres côté *unification* des différentes logiques, en témoigne le calcul des séquents unifié de Girard (1993), qui fait apparaître la logique classique, la logique intuitionniste et la logique linéaire non pas comme des calculs des séquents distincts sou forme d' instances d'un cadre général qu'elles partagent, mais comme des *fragments*, i.e. des classes particulières de formules et de séquents d'un seul calcul.

les *mouvements déductifs* en tant que tels. Lorsqu'il est question de modéliser nos pratiques inférentielles plutôt que d'articuler le comportement algébrique/ensembliste des formules d'une logique, il n'y a aucun doute quant à l'*adéquation*, la pertinence et la fertilité de celles-ci, au détriment de celle-là…[120]

[120] Toutefois, on notera que la logique catégorique, qui se fonde sur une généralisation de la sémantique tarskienne, permet de représenter la dynamique à l'aide des *ensembles variables*, liant ensemble syntaxe et sémantique.

Conclusion

Si l'on nous demandait ce qu'il faut avant tout retenir de ce mémoire, nous énumérerions les points suivants. Premièrement, il n'y a pas, à notre connaissance, d'argument convaincant en faveur de la thèse qui veut que le conflit entre logiques rivales soit apparent. En particulier, l'argument qui appuie cette thèse sur la prémisse selon laquelle une variation entre les relations de conséquence de deux logiques distinctes implique un changement de signification des constantes logiques est récusé par l'adoption du point de vue des *logiques sous-structurelles*. En fait, l'utilisation du calcul des séquents pour l'étude de la rivalité entre logique classique et logiques non-classiques permet une renégociation conceptuelle de l'enjeu du révisionnisme. Si l'on veut qu'il y ait un débat fertile autour de ce dernier, il est dans notre intérêt d'endosser l'existence d'une rivalité entre logiques. La stratégie d'un moniste comme Quine repose d'ailleurs sur le *présupposé* (frégéen) qui veut que la logique classique soit *la* logique de l'argumentation en langue naturelle. Dès lors que l'authenticité du conflit est acceptée, il est ouvert à quiconque d'argumenter pour le *monisme* ou le *relativisme* en tant que positions philosophiques, soit en jouant avec l'idée qu'une logique puisse être *correcte ou incorrecte*.

Deuxièmement, il existe une distinction fondamentale entre une logique (un système formel) et son application, qui s'effectue à l'aide d'une théorie logique. Cette distinction s'impose en force avec l'émergence des logiques non-classiques, et elle était ignorée de quelqu'un comme Frege car il *présupposait* que la logique classique soit *la* logique d'une réalité préexistante. Sur ce point, le parallèle avec la découverte des géométries non-euclidiennes est apparent : il nous faut distinguer entre une logique/géométrie pure et une logique/géométrie appliquée pour être en mesure d'expliquer l'émergence de systèmes alternatifs. Les principes dont on présupposait la certitude s'avèrent altérables, et la Logique (classique) n'apparaît plus d'emblée comme la logique d'une réalité préexistante. Il nous est tout à fait possible d'étudier les systèmes formels pour eux-mêmes, une activité typiquement *formaliste.* Plus encore, les *systèmes à la Gentzen* favorisent une analyse directe des principes logiques et le Hauptsatz fait apparaître une profonde symétrie et un déterminisme dans la syntaxe des règles logiques. De nos jours, les *structures logiques* apparaissent plutôt comme des *cadres* que *l'on appose* sur les phénomènes de notre choix. Ces considérations motivent l'introduction du concept de modèle (logico-mathématique) dans l'étude des logiques. Une logique est un système formel *indépendamment* de ses potentielles applications; une logique est potentiellement un *modèle*, une modélisation d'un phénomène quelconque. Partant du fait qu'il existe une pluralité de logiques, ne serait-ce que d'un point de vue mathématique, nous pouvons affirmer qu'il existe une pluralité de modèles différents, codifiant différemment nos pratiques inférentielles par exemple. En affirmant qu'il n'existe qu'une seule de ces logiques qui soit correcte au sens où elle modéliserait adéquatement nos pratiques inférentielles, le moniste demande beaucoup trop et au concept de modèle et à une seule relation de conséquence logique. Le concept de modèle favorise nettement le pluralisme logique dans la mesure où il implique une idéalisation du phénomène à l'étude qui laissera dans l'ombre un certain nombre de choses fondamentales; certaines choses qui seront possiblement couvertes par d'autres modèles.

Troisièmement, à la question de savoir s'il n'y a qu'une seule logique correcte, nous répondons par un *non ferme et pertinent*. De manière générale, il existe une pluralité de logiques, de structures mathématiques bien définies. Ce *pluralisme logico-mathématique* peut être constaté et démontré à l'aide d'approches plus générales, plus abstraites, e.g. la théorie des relations d'ordre et la théorie des catégories, partant d'une définition qui fixe le plus petit dénominateur commun entre logiques. Dans un contexte d'application locale, un pluralisme dépendant est de mise : il y a plusieurs logiques *correctes* au sens où différentes logiques modélisent correctement différents domaines de discours en fonction de différents buts théoriques. Dans un contexte d'application globale, nous favorisons un pluralisme dépendant suivant les lignes de Beall et Restall: il existe plusieurs relations de conséquence logique correctes (donc plusieurs logiques correctes) au sens où elles peuvent toutes être spécifiées dans un même cadre conceptuel, modèle-théorétique dans leur cas. Il a été démontré que la même chose pouvait être dite des deux autres approches au concept de conséquence logique : preuve-théorétique et dialogique

Quatrièmement, nous croyons qu'il est grand temps que la tradition philosophique – celle qui a notamment récupéré la logique de Frege pour en faire un outil servant à l'évaluation de la validité des arguments – élargisse l'ensemble de ce qu'elle range sous « Logique » en s'ajustant aux développements récents en logique algébrique, en logique catégorique, en théorie des preuves et en informatique théorique. Le mémoire a clairement mis l'emphase sur une telle prise en considération. C'est une méthodologie essentiellement pluraliste, qui est motivée par les incessantes réorganisations conceptuelles qu'effectuent les différentes disciplines scientifiques, tentant de s'éloigner d'une ossification dans le cadre méthodologique des théorèmes de complétude et de fiabilité. Le climat est beaucoup plus favorable au pluralisme, nous l'aurons constaté. Nous avons cherché à *expliquer la coexistence* d'une pluralité de logiques...

Avec les travaux de Frege et Russell, la Logique (mathématique) naît sous les auspices de l'absolutisme et du réalisme. C'est un *réalisme essentialiste*, transcendant; « à la Platon ». La structure logique du monde correspond à cette structure fixe et universelle, à cet Univers décrit par la logique classique, contenant tout ce à propos de quoi il nous est possible de parler (tous les objets…). Cette conception *présuppose* deux choses : (1) que les lois de la logique classique soient certaines; (2) que les constituants ontologiques de l'univers soient précisément ceux qui peuvent tomber dans le parcours des variables liées aux quantificateurs (du *Begriffsschrift*). Les *fonctions* doivent être définies pour *tous les objets (logiques…)* de l'Univers : la réalité décrite par cette structure logique est transmutée en une réalité indépendante de nos processus de connaissance (van Heijenoort, 1979a). Cette forme d'essentialisme n'explique pas la Logique, *elle la présuppose*. Cette conception fut réfutée par l'émergence de logiques non-classiques et certains développements provenant de traditions distinctes.

Comme Girard l'a souvent répété, l'approche modèle-théorique à la Tarski conserve quelque chose de cet essentialisme. Voyons pourquoi… Suite au résultat d'incomplétude (1931), qui nous dit, *grosso modo*, que quelque chose se passe mal entre sémantique et syntaxe[121], Tarski cherche à fonder la notion de conséquence logique dans son *approche sémantique*, à travers l'utilisation de ce fameux *métalangage (ensembliste)*. Il vise entre autre à pallier aux insuffisances de l'approche preuve-théorétique, la critiquant à l'aide de l'ω-incomplétude. Mais ce résultat s'applique à l'arithmétique de Peano, telle que formulée dans une logique *d'ordre supérieur*. L'analyse sémantique *courante* (par la théorie des modèles) pour la *logique du premier ordre,* elle*,* est *extensionnelment équivalente* à l'analyse preuve-théorétique étant donné le théorème de complétude forte… Pourtant, le remède tarskien d'une fondation sémantique a su conserver sa prégnance jusque dans l'analyse courante à travers la méthodologie des théorèmes de fiabilité et de complétude : tous les théorèmes doivent être interprétés par des formules logiquement vraies (fiabilité : $si\ \Gamma \vdash \Theta\ alors\ \Gamma \vDash \Theta$) et une formule vraie dans tous les modèles doit correspondre à un théorème (complétude : $si\ \Gamma \vDash \Theta\ alors\ \Gamma \vdash \Theta$). L'*idéologie* accrochée à cette méthodologie a voulu que la syntaxe (l'approche preuve-théorétique) soit subordonnée à la sémantique (l'approche modèle-théorétique), que les systèmes formels soient *justifiés* par la rectitude vis-à-vis de notre théorie sémantique. La signification des constantes logiques du langage, de la syntaxe, apparait alors comme étant déterminée par les fonctions de vérité; par la préservation de la vérité à travers les modèles tarskiens. Par exemple, la signification de $\wedge$ est déterminée par la clause suivante : "$A \wedge B$" est vraie si et seulement si A est vrai et B est vrai. La conjonction, c'est donc…la conjonction! Mais l'analyse n'est pas triviale, l'utilisation d'un méta-$\wedge$ pour cause… Toutefois elle présuppose plus la logique (des règles, des connecteurs) qu'elle ne l'explique. Comment explique-t-on la *disponibilité* de méta-connecteurs – d'où viennent-ils – dans un métalangage? On les présuppose, tout simplement… Chercher à les justifier entraînerait d'ailleurs une régression à l'infini, l'invocation d'un méta-métalangage *ad vitam aeternam*. La logique (ses connecteurs, ses règles) est « expliquée » de manière passablement artificielle, *essentialiste* pour ainsi

---

[121]En fait, nous pouvons dire que la syntaxe se manifeste clairement comme un *partenaire distinct* suite aux résultats de Gödel. Des systèmes de *différentes forces expressives* appariassent sous nos yeux… Voir Girard (2003).

dire. Il n'y est pas question de *signification*, *d'une explication* de ce qui passe effectivement dans la pratique, mais d'interprétations en termes de fonctions sur des structures algébriques/ensemblistes. Dans les années 1950, quand Prawitz et Dummett ont proposé la sémantique preuve-théorétique, ils ont redonné au terme « sémantique » son sens original, i.e. celui d'une *explication* de la *signification* des constantes et des règles logiques. Dans cette lignée, on adoptera le slogan de Girard (1998) : la signification des constantes et des règles logiques se trouvent dans les règles en tant que telles. Les systèmes à la Gentzen et les systèmes dialogiques pointent clairement dans cette direction.

Il nous faut une *nouvelle idéologie*… L'idée ne consiste pas à renverser l'ordre, à subordonner la sémantique à la syntaxe, mais à rendre une certaine autonomie à cette dernière en établissant un dialogue entre le couple sémantique/syntaxe; en le dépassant, pour être plus précis [122]. Avec leur focus sur les dénotations des formules, les « sémantiques » algébriques à la Tarski *fonctionnent* très bien, mais l'on peut raisonnablement douter qu'elles nous procurent une justification des systèmes de preuves. Ceux qui croient encore devoir justifier les systèmes déductifs par une sémantique modèle-théorétique négligent l'étude du calcul des séquents, qui fait apparaître la complétude comme une propriété *interne*, syntaxique. La question originale, celle de la complétude, était de s'assurer qu'il ne *manquait rien*, que l'on pouvait effectivement *épuiser* la classe des formules vraies par la classe des formules prouvables. Pour un ensemble Π_1 de formules du *premier ordre*, cette propriété est satisfaite. Or en formulant les différentes logiques en termes de calcul des séquents, on s'aperçoit que la propriété de la sous-formule tient pour cette même classe Π_1 tout en échouant à l'extérieur…; en considérant les preuves sans coupure, *l'ensemble des preuves possibles nous est donné*, et il n'y aucun moyen d'en produire de nouvelles (Girard, 2003). Cela nous offre une *justification syntaxique* des systèmes de preuves.

Enfin, l'étude du pluralisme logique va de pair avec le développement d'une *théorie générale des logiques*. L'explication de l'existence d'une pluralité de logiques passe par l'utilisation de certaines approches suffisamment générales et abstraites pour

[122] C'est un projet férocement défendu par Girard (2007; 2011), et avec raisons.

unifier les structures logiques sous un certain aspect tout en identifiant ce qui les distingue. Le calcul des séquents participe clairement d'une telle théorie en exhibant certaines propriétés structurelles qui gouvernent les preuves en tant que telles. Toutefois, il reste encore beaucoup de travail à faire pour déterminer les connexions entre les hypothèses structurelles et les considérations sémantiques utilisées par certains logiciens/philosophes pour justifier les restrictions sur les relations de conséquence logique. Une partie du travail pourra être fait par l'application de *la logique catégorique* à l'étude du pluralisme logique. En nous faisant passer directement d'un calcul des séquents à une catégorie qui lui correspond, la logique catégorique *explicite* clairement et complètement les passages d'une logique à une autre à travers la modification de certaines propriétés fondamentales (algébriques et catégoriques). Plus encore, l'utilisation des *ensembles variables* en logique catégorique répond de la nouvelle idéologie, faisant largement dialoguer sémantique et syntaxe.

Contre le moniste, nous aurons donc affirmé qu'il est faux de supposer qu'*un* système formel puisse *décrire correctement* l'ensemble de nos pratiques inférentielles. Une telle transparence, une telle adéquation est étrangère à l'idée de modèle. La Logique a à faire avec les concepts, et une logique peut tout au plus rendre adéquatement compte des mouvements déductifs qui s'attachent à *une* certaine classe de concepts. La logique classique est-elle la bonne logique pour l'analyse des mouvements déductifs impliquant des concepts statiques/immuables - mathématiques? - par exemple? Aucune idée, mais c'est une bonne question.

Bibliographie

Abrusci, V. M. & P. Ruet, “Noncommutative logic I: the multiplicative fragment”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 2000.

Awodey, S., & A. W. Carus, “Carnap, completeness, and categoricity: The *Gabelbarkeitssatz* of 1928”, *Erkenntnis,* 54: 145–172, 2001.

Awodey, S. & A. W. Carus, "The Turning Point and the Revolution: Philosophy of Mathematics in Logical Empiricism from *Tractatus* to *Logical Syntax*", *Department of Philosophy,* Paper 110, 2005.

Awodey, S. & A. W. Carus, “Carnap’s Dream: Gödel, Wittgenstein and Logical Syntax”, *Synthese,* 159: 23-45, 2007.

Awodey, S. & A. W. Carus, “From Wittgenstein’s Prison to the Boundless Ocean: Carnap’s Dream of *Logical Syntax*”, dans Wagner, P. (ed.), *Carnap’s Logical Syntax of Language*, Basingstoke, Palgrave Macmillan, 79-108, 2009.

Barwise, J. & J. Perry, *Situations and Attitude*, Bradford Books, MIT Press, 1983.

Beall, J., and G. Restall, “Logical Pluralism,” *Australasian Journal of Philosophy,* 78: 475–93, 2000.

Beall, J. C. and G. Restall., *Logical Pluralism*, Oxford, Oxford University Press, 2006.

Béziau, J.-Y., “A Sequent Calculus for Lukasiewicz’s Three-Valued Logic based on Susko’s Bivalent Semantics”, *Bulletin of the Section Logic*, 28: 89-97, 1999.

Béziau, J.-Y., “From consequence operator to universal logic: a survey of general abstract logic”, in *Logica Universalis: Towards a general theory of logic*, J.-Y.Béziau (ed), Birkhäuser, Basel, 3-17, 2005.

Blass A., “A Game Semantics for Linear Logic”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 56:183–220, 1992.

Bonnay, D. & M. Cozic (dir.), *Philosophie de la logique. Conséquence preuve et vérité*, Paris, Vrin, 2009.

Brandom, R., *Making It Explicit*, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1994.

Brandom, R., *Articulating Reasons: an introduction to inferentialism*, Cambridge, MA, Harvard University Press, 2000.

Brandom, R, *Between Saying and Doing: towards an analytic pragmatism*, Oxford University Press, Oxford, 2008.

Carnap, R., (1934), *The Logical Syntax of Language*, London: Routledge, Trans. Amethe Smeton from *Logische Syntax der Sprache*, 1964.

Carnap, R. (1950), “Empiricism, semantics, and ontology”, dans *Meaning and necessity* (2nd) 205–221. Chicago: University of Chicago Press, 1956.

Castelnérac, B., & M. Marion, « Arguing for Inconsistency: Dialectical Games in the Academy » dans *Acts of Knowledge: History, Philosophy and Logic*, G. Primiero & S. Rahman (éd.). Londres : College Publications, 37-76, 2009.

Cook, R. T., “Let a Thousand Flowers Bloom: A Tour of Logical Pluralism”, *Philosophy Compass*, 10: 492-504, 2010.

Dosen, K., « Logical Constants as Punctuation Marks », *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30: 362-381, 1989.

Dosen, K. & P. Schroeder-Heister (éds.), *Substructural Logics*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

Dubucs, J., “Feasibility in Logic”, *Synthese*, 132: 213-237, 2002.

Dubucs, J. & M. Marion., « Radical Anti-Realism and Substructural Logics », dans Philosophical *Dimensions of Logic and Science. Selected Contributed Papers from the 11th International Congress of Logic, Methodology, and the Philosophy of Science, Krakòw*, J. Cachro, G. Kurczewski (éd.), Dordrecht: Kluwer, 235-249, 2003.

Dummett, M., *The Logical Basis of Metaphysics*, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1991.

Dummett, M., *Frege: Philosophy of Language*, 2nd, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1993.

Dunn, M.,”Star and Perp: Two Treatments of Negation”, dans James E. Tomberlin (éd.), *Philosophical Perspectives,* CA: Ridgeview Publishing Company, 331-357, 1994.

Eilenberg, S. & Mac Lane, S., “General Theory of Natural Equivalences”, *Transactions of the American Mathematical Society*, 58: 231–294, 1945.

Engel, P., *La Norme du Vrai, Philosophie de la Logique*, Gallimard, NRF essais, Paris, 1989.

Etchemendy, J., *The Concept of Logical Consequence*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1990.

Field, H., “Pluralism in logic", *The Review of Symbolic Logic*, Vol. 2, No.2, 342-329, 2009.

Frege, G., (1893), *The Basic Laws of Arithmetic*, trad. M. Furth, Berkeley, University of California, 1967.

Frege, G., (1884), *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number*, trad. J.L. Austin, 2nd, London, Blackwell, 1974.

Frege, G., *Begriffsschrift*, éd. Nebert (1879), trad.f. C. Besson, Paris, Vrin, 1999.

Friedman, M., *Reconsidering Logical Positivism*, Cambridge, Cambridge University Press, 1999.

Gentzen, G., (1935) “Investigations into Logical Deduction”, *America*n *Philosophical Quarterly*, 1: 288-306, 1964.

Girard, J.-Y., “Linear logic”, *Theoretical Computer Science*, 50: 1–102, 1987.

Girard, J.-Y., Lafont, Y., and P.Taylor, *Proofs and types*, vol. 7 des Cambridge tracts in theoretical computer science, Cambridge University Press, 1990.

Girard, J.-Y., “On the Unity of Logic”, *Annals of Pure and Applied Logic,* 59: 201-217, 1993.

Girard, J.-Y., “On the meaning of logical rules I: syntax vs. Semantics”, In Berger, U. and Schwichtenberg, H., editors, *Computational Logic*, 215 – 272, Heidelberg. Springer, 1999.

Girard, J.-Y., *Du pourquoi au comment : la théorie de la démonstration, du programme de Hilbert à la logique linéaire,* Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, eds Cassini, 2003. Rédigé par Pierre Castéran et Eric Charpentier, d'après un exposé du 5 Juin 1997.

Girard, J.-Y., “Locus Solum: From the rules of logic to the logic of rules”, *Mathematical Structures in Computer Science* 11(3): 301-506, 2001.

Girard, J.-Y., “From foundations to ludics”, *Bulletin of Symbolic Logic,* 9(2): 131-168, 2003.

Girard, J.-Y, *Le point aveugle, tome 1 : vers la perfection, tome 2 : vers l’imperfection.* Visions des Sciences. Hermann, Paris. 296 p; 299, 2006-2007.

Girard, J.-Y., “La Logique Aujourd’hui”, Manuscrit non-publié, 2007 : http://iml.univ-mrs.fr/~girard/roma2004.pdf.

Gödel, K., (1930) “The Completeness of the Axioms of the Functional Calculus of Logic”, dans van Heijenoort J., *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic,* Cambridge, Harvard University Press, 583-591. 1967.

Gödel, K., (1931) “On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I", dans van Heijenoort J., *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic,* Cambridge, Harvard University Press, 595-617. 1967.

Goldfarb, W., “Carnap’s *Syntax* Programme and The Philosophy of Mathematics”, dans Wagner, P. (éd.), *Carnap’s Logical Syntax of Language*, Basingstoke, Palgrave Macmillan, 109-120, 2009.

Goldstein, L., “Smooth and Rough Logic”, *Philosophical Investigations*, 15: 93-110, 1992.

Grattan-Guinness, I., “Living Together and Living Apart: On the Interactions between Mathematics and Logics from the French Revolution to the First World War’, *South African Journal of Philosophy* 7, 73‑82, 1988.

Haack, S., *Philosophy of Logics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1978.

Haack, S., *Deviant Logic, Fuzzy Logic. Beyond the Formalism*, Chicago, University of Chicago Press, 1996.

Hacking, I., “What is Logic?” *The Journal of Philosophy*, 76 (6): 285-319, 1979.

Hahn, H. (1929). *Empiricism, Logic and Mathematics*, B. McGuinness, ed., Dordrecht: Reidel, 1980.

Howard, W. A. “The formulae-as-types notion of construction” dans Hindley, J. P. and Seldin, J. R., editors, To H. B. Curry : *Essays on Combinatory logic, Lambda-calculus and Formalism*, 479 –490, London, Academic Press, 1980.

Kleene, S. C. (1967). *Mathematical Logic*, Dover Publications, New York, 2002.

Köllner, P., « Truth in Mathematics : The Question of Pluralism », dans O. Bueno et O. Linnebo (éds.), *New Waves in Philosophy of Mathematics*, Basingstoke, Palgrave Macmillan, 80-116, 2009.

Kowalski, T. & H. Ono, *Residuated Lattices: An algebraic glimpse at logics without contraction*, monograph, March, 2001.

Kneale, W., “The Province of Logic”, dans H. D, Lewis (ed.), *Contemporary British Philosophy*, 237–261. London, George Allen and Unwin, 1956.

Kneale, W., and M. Kneale., *The Development of Logic*, Oxford, Oxford University Press, 1962.

Lambek, J., “Deductive Systems and Categories I. Syntactic Calculus and Residuated Categories”, Mathematical *Systems Theory*, 2: 287–318, 1968.

Lambek, J., “Deductive Systems and Categories II. Standard Constructions and Closed Categories”, *Category Theory, Homology Theory and their Applications I*, Berlin: Springer, 76–122, 1969.

Lambek, J. & Scott, P.J., *Introduction to Higher Order Categorical Logic*, Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

Lorenz K., “Dialogical Logic”, dans W. Marciszewski (éd.), *Dictionary of Logic as Applied in the Study of Language. Concept/Method/Theories*. The Hague, Boston, London: Nijhoff, 117–125, 1981.

Mac Lane, S. & Moerdijk, I., *Sheaves in Geometry and Logic*, New York: Springer-Verlag, 1992.

Mac Farlane, J., *What Does it Mean to Say that Logic is Formal?,* PhD thesis, University of Pittsburgh, 2000.

Marion M., « Qu’est-ce que l’inférence ? Une relecture du *Tractatus logico-philosophicus* », *Archives de Philosophie*, 64 : 545-567, 2001.

Marion, M., « Philosophy of Logic » dans *The Edinburgh Companion to Twentieth-Century Philosophies/The Columbia Companion to Twentieth-Century Philosophies*, C. Boundas (éd.). Edinburgh/New York : Edinburgh University Press/Columbia University Press, p. 252-269, 2007.

Marion, M., « Why Play Logical Games ? », dans *Games: Unifying Logic, Language, and Philosophy*, O. Majer, A.-V. Pietarinen & T. Tulenheimo (éd.). Dordrecht : Springer, p. 3-26, 2009.

Marion, M., « Between Saying and Doing: From Lorenzen To Brandom and Back », dans *Constructions. Festschrift for Gerhard Heinzmann*, P.-E. Bour, M. Rebuschi & L. Rollet (éd.). Londres : College Publications, p. 489-497, 2010.

Marquis, J.-P., *From a Geometrical Point of View: a study in the history and philosophy of category theory*, Springer, 310 p., 2009.

Marquis, Jean-Pierre, "Category Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2011 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/category-theory/.

Mc Gee, V., “Logical Operations”, *Journal of Philosophical Logic*, 25: 567-580, 1996.

Ono, H., “Substructural Logics and Residuated Lattices – an Introduction”, dans V. F Hendriks & J. Malinowski (eds.), *Trends in Logic: 50 years of Studia Logica*, Kluwer, 20: 177-212, 2003.

Peckhaus,V., « Calculus Ratiocinator Vs Characteristica Universalis? The Two Traditions in Logic, Revisited », *History and Philosophy of Logic*, vol.25, 3-14, 2010.

Prawitz, D. (1965) *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, Dover Publications, New York, 2006.

Prawitz, D., « Meaning and Proofs: On the Conflict between Classical and Intuitionistic Logic », *Theoria*, 43: 1-40, 1977.

Prawitz, D., “Meaning Approached via Proofs”, *Synthese,* 148: 507-524, 2006.

Priest, G., “Logic: one or many?”, dans B. Brown, J. Woods (éds.), *Logical Consequences*, Kluwer, 2001.

Priest, G., “On Alternative Geometries, Arithmetics and Logics: A Tribute to Lukasiewicz”, *Studia Logica*, 71: 441-468, 2003.

Priest, G., *An Introduction to Non-Classical Logic*, 2nd., Cambridge University Press, 2008.

Putnam, H., « Is Logic Empirical? », dans R. S. Cohen *et al.* (dir.), *Boston Studies in the Philosophy of Science*, vol. 5, Dordrecht, D. Reidel, 216-41, 1968.

Quine, W. V., *Philosophy of Logic*, 2nd, MA, Harvard University Press, 1986.

Rahman S., Ruckert H. & Fischmann M., “On Dialogues and Ontology. The Dialogical Approach to Free Logic”, *Logique et analyse*, 160 :357–374, 1997.

Rahman S. & W. A. Carnielli, “The Dialogical Approach to Paraconsistency”. *Synthese* 125: 201–232, 2000.

Rahman S. & H. Rückert, “Dialogische Modallogik (fur T, B, S4, und S5)”, *Logique et analyse*, 167–168 :243–282, 2001.

Rahman, S., & Keiff, L., “How to be a Dialogician”, dans D. Vanderveken (éd.), *Logic, Thought and Action*, Springer, 359-408, 2005.

Rahman, S., & J. Redmond, “Hugh MacColl and the Birth of Logical Pluralism”, dans : J. Woods & D. Gabbay, *Handbook of History of Logic*, Elsevier, vol. 4, pp. 535-606, 2008.

Ray, G., “Logical Consequence: A Defence of Tarski”, *Journal of Philosophical Logic*, 25: 617-677, 1996.

Read, S., “Formal and Material Consequence”, *Journal of Philosophical Logic*, 23: 247-265, 1994.

Read, S., *Thinking about Logic: an introduction to the philosophy of logic*, Oxford University Press, Opus, Oxford, 1995.

Read, S., “Monism: The One True Logic”, dans *A Logical Approach to Philosophy: essays in honor of Graham Solomon*, Netherlands, Springer, 2006.

Resnik, M., “Ought there to be but one logic?”, dans B. J. Copeland (ed.), *Logic and Reality: Essays on the Legacy of Arthur Prior*, 489–517, Clarendon, Oxford, 1996.

Restall, G., *An Introduction to Substructural Logics*, New York, Routledge, 2000.

Restall, G. “Carnap’s Tolerance, Meaning, And Logical Pluralism”, *The Journal of Philosophy*, 99: 426-443, 2002.

Ricketts, T., “Carnap’s Principle of Tolerance, Empiricism and Conventionalism", dans P. Clark et B.Hale, *Reading Putnam*, Oxford, Blackwell, 176‑200, 1994.

Ricketts, T., “Frege, the Tractatus and the Logocentric Predicament”, *Noûs*, 19 (1): 3-15, 1985.

Rückert, H., « Why Dialogical Logic? », dans H. Wansing (dir.), *Essays on Non-Classical Logic*, Singapore, World Scientific, 165-185, 2001.

Russell, B., *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, Allen & Unwin, 1919.

Russell, G., “One True Logic?”, *Journal of Philosophical Logic*, 37: 593-611, 2008.

Schilpp, P. A., (éd.), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, Chicago, Open Court, 1963.

Schroeder-Heister, P., “Validity Concepts in Proof-Theoretic Semantics”, *Synthese*, 148: 525-571, 2006.

Shapiro, S., *Vagueness in Context*, Oxford, Oxford University Press, 2006.

Stadler, F., (1997) "Studien zum Wiener Kreis, Suhrkamp", dans *The Vienna Circle. Studies in the Origins, Development and Influence of Logical Empiricism*, Vienna: Springer, 2001.

Straßburger, L., « What is a Logic, What is a Proof?", dans J.-Y. Béziau (éd.), *Logica Universalis*, 135-145, 2005.

Sundholm, G., "Inference, Consequence, Implication: a Constructivist's Perspective", *Philosophia Mathematica*, 6 (3): 178-194, 1998.

Tarski, A., *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, translated by J. H. Woodger, Oxford, Clarendon Press, 1956.

Tarski, A., "What are logical notions?," edited by J. Corcoran, *History and Philosophy of Logic,* 7: 143-154, 1986.

Tarski, A., (1936), "Du Concept de Conséquence Logique", dans Bonnay, D. & M. Cozic (dir.), *Philosophie de la logique. Conséquence preuve et vérité*, Paris, Vrin, 83-97, 2009.

van Heijenoort, J., "Logic as Language and Logic as Calculus", *Synthese,* vol. 17: 324-30, 1967.

van Heijenoort J., (1966) *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic,* Cambridge, Harvard University Press, p. 664, 3nd, 1976.

van Heijenoort, J., (1976) "Set-theoretic semantics", dans *Selected Essays*, Bibliopolis, Napoli, 1985.

van Heijenoort, J., (1979a) "Absolutism and Relativism in Logic", dans *Selected Essays*, Bibliopolis, Napoli, 1985.

Varzi, A., "On Logical Relativity", *Philosophical Issues*, 10: 197-219, 2002.

Wagner, P. (ed.), *Carnap's Logical Syntax of Language*, Basingstoke, Palgrave Macmillan, 2009.

Wagner, P., "Pluralisme Logique, Tolérance et Empirisme", *Philonsorbonne*, no.5, 2010.

Whitehead, A. N., & B. Russell, *Principia Mathematica*, 3 vols, Cambridge University Press, 1910, 1912, and 1913, 2nd , 1925 (Vol. 1), 1927 (Vols 2, 3).

Wittgenstein, L., *Tractatus logico-philosophicus*, trad. Gilles-Gaston Granger, Gallimard, Paris, 1993.